74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Z číslic* 1 *až* 9 *vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a na tabuli napíšeme jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Můžeme tak na tabuli získat právě dvě různá prvočísla? Pokud ano, určete všechny takové dvojice prvočísel.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna dvojmístná čísla, jejichž nejmenším prvočíselným dělitelem je číslo 7.

N2. Dokažte, že každé složené dvojmístné číslo má prvočíselného dělitele menšího než číslo 10.

D1. Najděte všechna trojmístná čísla, která se skládají pouze z číslic 1, 2, 3, 4 (nemusí být použity všechny) a každé dvojmístné číslo určené jeho sousedními číslicemi je dělitelné číslem a) 11, b) 7.

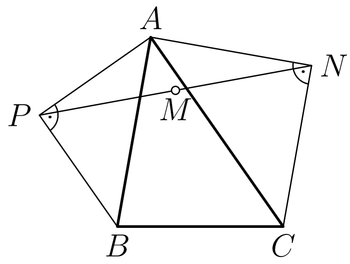
D2. Jeník napsal na tabuli několik různých prvočísel (aspoň tři). Když sečetl libovolná dvě z nich a tento součet zmenšil o 7, bylo výsledné číslo mezi napsanými. Která čísla mohla na tabuli být?

D3. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli.

D4. Na tabuli je napsáno jedno nebo několik různých dvojmístných přirozených čísel. Číslici c na tabuli nazveme *dobrou*, je-li součet těch čísel z tabule, která obsahují číslici c, roven číslu 71. a) Které z číslic 0 až 9 mohou být dobré? b) Kolik nejvíce číslic může být současně dobrých?

2. *V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 45°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABP a ACN s přeponami AB a AC. Označme M střed úsečky PN. Dokažte, že úsečka AM má délku rovnou polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC.*

(Patrik Bak, Anastasia Bredichina)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jak v daném trojúhelníku najdeme střed kružnice opsané?

N2. Uvažujme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů a délky ramen.

N3. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě označíme S, T, U, V středy stran AB, BC, CD, DA. Dokažte, že úsečka SU půlí úsečku VT.

N4. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ACB| = 90°$ a $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány rovnostranné trojúhelníky ABP a ACN. Označme S střed úsečky AB. a) Dokažte, že přímky NS a AP jsou rovnoběžné. b) Dokažte, že trojúhelníky ABC a NSA jsou shodné. c) Nechť T, U jsou těžiště po řadě trojúhelníků ABP, ACN. Dokažte, že trojúhelníky TAU a PAC jsou podobné a určete koeficient jejich podobnosti.

N5. Uvažujme trojúhelník ABC, ve kterém je $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky AC označme D, obraz C podle AB označme E a obraz B podle AD označme F. Dokažte, že $|CF| = |DE|$.

Následující doplňující úlohy jsou zaměřeny na vyjádření délek v trojúhelníku pomocí délek jeho stran, resp. velikostí úhlů. Takové vyjádření můžeme použít při částečném nebo úplném řešení některých geometrických úloh. Ve všech úlohách používáme standardní značení délek stran a velikostí úhlů trojúhelníku ABC.

D1. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC s ostrým úhlem α je roven $a/(2\sin\alpha)$.

D2. V trojúhelníku ABC platí $\alpha = 45°$. Pomocí délek stran b, c vyjádřete a) výšku ke straně c, b) délku strany a.

D3. Vyřešte předchozí úlohu pro trojúhelník, ve kterém je $\alpha = 135°$.

D4. Nechť ABC je trojúhelník s tupým úhlem α. Patu výšky z vrcholu C označíme P. Pomocí délek jeho stran vyjádřete $|PA|$. Jak se změní výsledek, pokud by byl úhel α ostrý?

D5. Nechť ABC je trojúhelník a t_c délka jeho těžnice ke straně c. Dokažte, že platí

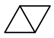
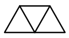
$$t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

D6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.

D7. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s nejdelší stranou BC. Uvnitř jeho stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$.

Uvažujme dále body F a G tak, že $ABCF$ a $ACBG$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $|FD| = |GE|$.

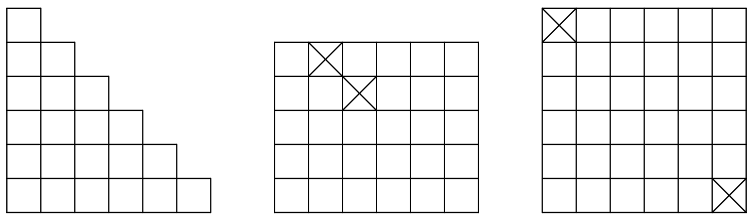
D8. Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$.

3. *Pro která přirozená čísla n lze rovnostranný trojúhelník se stranou délky n rozřezat na shodné dílky tvaru: a)* *, b)* *? Dílky jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky 1.* (Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která lze čtverec o rozměrech $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×2.

N2. Uvažujme následující tři útvary složené z jednotkových čtverců, ze kterých vystřihneme čtverce označené křížkem. Lze zbytky útvarů rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×2?



N3. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n je součet prvních n lichých čísel roven číslu n^2.

N4. L-*tromino* se skládá ze tří jednotkových čtverců uspořádaných do tvaru písmene L. Pro které hodnoty n z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ lze čtverec $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru L-tromina?

Zájemcům doporučujeme seznámit se s matematickou indukcí. Jedná se o užitečnou důkazovou metodu, zejména v situacích založených na opakování jisté myšlenky. Můžete se s ní seznámit v brožuře Antonína Vrby *Princip matematické indukce* z edice *Škola mladých matematiků*.

D1. Pro která kladná celá čísla lze čtverec $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru L-tromina?

D2. Uvažujme čtverečkovou síť skládající se z $2^n \times 2^n$ jednotkových čtverečků. Libovolný jednotkový čtvereček obarvíme černě. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n lze tuto čtverečkovou síť pokrýt dílky tvaru L-tromina tak, aby jedině tento černý čtvereček zůstal nepokrytý.

D3. Určete všechna celá čísla $n \geqq 4$, pro která lze čtverec se stranou délky n rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×4.

D4. Uvažujme čtverečkovanou síť $n \times n$ skládající se z $n \times n$ jednotkových čtverečků. Do této sítě chceme bez překrývání umístit několik pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s přeponou délky 2, jejichž vrcholy se nacházejí ve vrcholech čtverečkové sítě. Navíc, každá strana čtverečku se musí nacházet v právě jednom trojúhelníku (uvnitř nebo na obvodu). Najděte všechna přirozená čísla, pro která je to možné.

4. *a) Najděte příklad dvojmístného přirozeného čísla n takového, že číslo $1/n$ má ve svém desetinném zápise za desetinnou čárkou právě dvě číslice.*

b) Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla k, l existují právě dvě kladná racionální čísla, která mají v desetinném zápise za desetinnou čárkou právě k číslic a jejich převrácené hodnoty právě l číslic.

(Desetinný zápis uvažujeme nejkratší možný.) (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zjistěte, kolik desetinných míst mají za desetinnou čárkou (v nejkratším možném zápisu) čísla $1/8$, $1/32$, $1/256$.

N2. Zjistěte, pro která kladná celá čísla n má číslo a) $n/3$, b) $n/30$, c) $n/18$ konečný desetinný zápis. Svá tvrzení zdůvodněte.

N3. Dokažte, že kladné racionální číslo q má ve svém nejkratším desetinném zápisu právě $d \geqq 1$ číslic za desetinnou čárkou právě tehdy, když $q = c/10^d$ pro nějaké kladné celé číslo c nedělitelné deseti.

N4. Najděte všechna kladná celá čísla vyhovující části a) soutěžního úlohy.

N5. Najděte všechny dvojice nesoudělných kladných celých čísel x, y, pro která platí a) $xy = 441$, b) $xy = 13^4 \cdot 14^n$, kde n je dané kladné celé číslo.

D1. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel (a, b), pro které platí

$$4^a = b^2 + 7.$$

D2. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je součin $(2^n + 1)(3^n + 2)$ dělitelný číslem 5^n.

D3. Rozhodněte, zda existuje 2024 navzájem různých kladných celých čísel s následující vlastností: Uvážíme-li všechny možné podíly dvou různých čísel (uvažujeme a/b i b/a), dostaneme čísla s konečnými desetinnými rozvoji (za desetinnou čárkou) navzájem různých nenulových délek.

D4. Rozhodněte, zda existují kladná celá čísla n a k taková, že

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla.

D5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru $2^a + 3^b - 5^c$, přičemž a, b, c jsou nezáporná celá čísla.

Zájemcům o získání celistvějších poznatků z oblasti dělitelnosti celých čísel doporučujeme brožuru Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* z edice *Škola mladých matematiků* a také brožuru Aloise Apfelbecka *Kongruence*, která obsahuje širokou potřebnou teorii k práci se zbytky po dělení.

5. *Označme k kružnici opsanou ostroúhlému trojúhelníku ABC. Její obraz v souměrnosti podle přímky BC protíná polopřímky opačné k BA a CA po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že úsečky CD a BE se protínají na kružnici k. Určete všechny možné velikosti úhlu BAC.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Před řešením této úlohy vám doporučujeme seznámit se s větou o obvodovém a středovém úhlu a s vlastnostmi tětivových čtyřúhelníků. K objevení tohoto vztahu navádí první návodná úloha. Zájemcům doporučujeme brožurku Stanislava Horáka *Kružnice* z edice *Škola mladých matematiků*.

N1. Na kružnici k se středem O jsou dány body B a C tak, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Na delším oblouku BC zvolme bod A a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby měl úhel BAC co největší velikost. c) Jak se změní výsledek předešlé úlohy, pokud bod A můžeme zvolit libovolně na kružnici k (s výjimkou bodů B, C)?

N2. Připomeňte si následující tvrzení: Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet velikostí jeho protějších úhlů je 180°.

N3. Dokažte, že obloukům stejné délky téže kružnice přísluší obvodové úhly stejné velikosti.

N4. Označme S střed oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A. Dokažte, že AS je osou úhlu BAC.

N5. Dvě shodné kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Na kružnici k zvolíme bod C a na kružnici l bod D tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky CD. Dokažte, že $|BC| = |BD|$.

N6. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané a M střed přepony AC. Předpokládejme, že body B, I, M, C leží na jedné kružnici. Určete velikost úhlu BAC.

D1. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici.

D2. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patami výšek D, E, F ležícími po řadě na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F ve středové souměrnosti podle středu strany AB leží na přímce DE. Určete velikost úhlu BAC.

D4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?

D5. Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu u vrcholu A, pokud mají kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod.

6. *Kladná reálná čísla x, y, z splňují nerovnosti $xy \geqq 2$, $xz \geqq 3$, $yz \geqq 6$. Jakou nejmenší hodnotu může nabývat výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Návodné úkoly N1 až N3 jsou zaměřeny na úpravy výrazů na *čtverce*, čímž myslíme druhé mocniny mnohočlenů (v našem případě dvojčlenů). Takové úpravy jsou často klíčové při dokazování nerovností či hledání extrémů výrazů, což si můžete vyzkoušet v úlohách N4 a N9. Úloha N7 upozorňuje na nesprávné řešení úlohy N5, která je podobná i samotné soutěžní úloze. Úloha N8 naznačuje, jak lze tuto nesprávnou úvahu opravit.

N1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b$.

N2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$, přičemž rovnost nastává jedině pro $a = b = c$.

N3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí
a) $5a^2 + 6b^2 + 7c^2 \geqq 4ab + 6ac + 8bc$, b) $3a^2 + 3b^2 + 8c^2 \geqq 4(ab + ac + bc)$,
c) $5a^2 + 5b^2 + 2c^2 \geqq 2ab + 4ac + 4bc$.
Určete všechny trojice čísel a, b, c, pro které nastává rovnost.

N4. Kladná reálná čísla x, y splňují $xy \geqq 2$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $4x^2 + 9y^2$?

N5. Nezáporná reálná čísla x, y, z splňují $x + y \geqq 6$, $x + z \geqq 8$, $y + z \geqq 10$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + y^2 + z^2$?

N6. Nezáporná reálná čísla x, y, z splňují $x + y \geqq 4$, $x + z \geqq 8$, $y + z \geqq 10$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + y^2 + z^2$?

N7. Rozhodněte, zda je následující řešení úlohy N5 úplné a korektní: Jelikož chceme dostat co nejmenší hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$, tak chceme, aby i výrazy $x + y$, $x + z$, $y + z$ nabývaly co nejmenší hodnoty, tedy aby v nich byla rovnost. Dostáváme tak soustavu tří rovnic $x + y = 6$, $x + z = 8$, $y + z = 10$, která má jediné řešení $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. Nejmenší hodnota je tedy dosažena u tohoto řešení a je to $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$.

N8. Dokažte, že při řešení úlohy N5 se stačí omezit na trojice x, y, z, pro které platí alespoň dvě z rovností $x + y = 6$, $x + z = 8$, $y + z = 10$.

N9. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $9x^2 + 36/x^2$, pokud a) $x \in (0, \infty)$, b) $x \in (0, 1\rangle$, c) $x \in \langle 2, \infty)$.

D1. Dokažte, že pro libovolná dvě nezáporná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$\frac{x + y}{2} \geqq \sqrt{xy},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x = y$.*

D2. Dokažte, že pro libovolné kladné reálné konstanty k, ℓ je funkce $y = kx - \ell/x$ pro kladná čísla x rostoucí.

* Této nerovnosti se říká nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem a platí i pro více než dvě čísla, tedy $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ platí pro libovolných n nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D3. Uvažujme funkci $y = kx^2 + \ell/x^2$ pro kladné reálné číslo x a kladné reálné konstanty k, ℓ. Nechť $M = \sqrt[4]{\ell/k}$. Dokažte, že tato funkce nabývá minima pro $x = M$, přičemž pro $x \in (0, M\rangle$ je klesající a pro $x \in \langle M, \infty)$ je rostoucí.

D4. Uvažujme funkci $y = kx + \ell/x$ pro kladné reálné číslo x a kladné reálné konstanty k, ℓ. Nechť $M = \sqrt{\ell/k}$. Dokažte, že tato funkce nabývá minima pro $x = M$, přičemž pro $x \in (0, M\rangle$ je klesající a pro $x \in \langle M, \infty)$ je rostoucí.

D5. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

kde x je libovolné reálné číslo. Pro která x výraz V této hodnoty nabývá?

D6. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

D7. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

D8. Reálná čísla a, b splňují vztah $a - b \geqq 2$. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $a^4 + b^4$.

D9. Najděte maximální hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ pro reálná čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ jsou z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

D10. Součet 74 (ne nutně různých) reálných čísel z uzavřeného intervalu $\langle 4, 10\rangle$ je 356. Určete největší možnou hodnotu součtu jejich druhých mocnin.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Z číslic* 1 *až* 9 *vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a na tabuli napíšeme jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Můžeme tak na tabuli získat právě dvě různá prvočísla? Pokud ano, určete všechny takové dvojice prvočísel.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna dvojmístná čísla, jejichž nejmenším prvočíselným dělitelem je číslo 7. [Jsou to čísla $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 11 = 77$, $7 \cdot 13 = 91$. Musí jít o násobky sedmi, tedy čísla tvaru $7k$, přičemž k nemůže mít menšího prvočíselného dělitele než 7. To vylučuje hodnoty $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$. Pro $k \geqq 15$ má již číslo $7k$ více než dvě číslice.]

N2. Dokažte, že každé složené dvojmístné číslo má prvočíselného dělitele menšího než číslo 10. [Sporem. Co kdyby existovalo dvojmístné složené číslo, jehož každý prvočíselný dělitel je alespoň 10? Jelikož se jedná o složené číslo, musí mít v prvočíselném rozkladu alespoň dvě prvočísla, ale ta musí být alespoň 10, čili uvažované číslo by bylo alespoň $10 \cdot 10 = 100$, a tedy ne dvojmístné.]

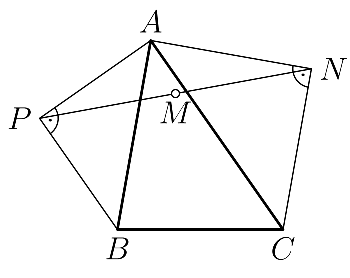
D1. Najděte všechna trojmístná čísla, která se skládají pouze z číslic 1, 2, 3, 4 (nemusí být použity všechny) a každé dvojmístné číslo určené jeho sousedními číslicemi je dělitelné číslem a) 11, b) 7. [a) Čísla 111, 222, 333, 444; protože dvojmístná čísla dělitelná 11 jsou právě ta se stejnými číslicemi. b) 142, 214, 421. Možná dvojmístná čísla dělitelná sedmi jsou 14, 21 a 42, přičemž z nich musíme vybrat dvě tak, aby poslední číslice prvního čísla byla totožná s první číslicí druhého čísla.]

D2. Jeník napsal na tabuli několik různých prvočísel (aspoň tři). Když sečetl libovolná dvě z nich a tento součet zmenšil o 7, bylo výsledné číslo mezi napsanými. Která čísla mohla na tabuli být? [63–B–II–2]

D3. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli. [58–B–I–1]

D4. Na tabuli je napsáno jedno nebo několik různých dvojmístných přirozených čísel. Číslici c na tabuli nazveme *dobrou*, je-li součet těch čísel z tabule, která obsahují číslici c, roven číslu 71. a) Které z číslic 0 až 9 mohou být dobré? b) Kolik nejvíce číslic může být současně dobrých?[71–C–II–3]

2. *V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 45°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABP a ACN s přeponami AB a AC. Označme M střed úsečky PN. Dokažte, že úsečka AM má délku rovnou polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC.* (Patrik Bak, Anastasia Bredichina)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jak v daném trojúhelníku najdeme střed kružnice opsané? [Střed kružnice opsané trojúhelníku se nachází v průsečíku os jeho stran.]

N2. Uvažujme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů a délky ramen. [$90°$, $45°$, $45°$ a ramena délek $\sqrt{2}/2$. Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné. Nemohou tak být oba pravé. Proto se jedná o úhly BAC a ABC, součet jejich velikostí je $180° - 90° = 90°$, tedy oba mají velikost $45°$. Z Pythagorovy věty pro délku r odvěsen platí $r^2 + r^2 = 1^2$ čili $r = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.]

N3. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě označíme S, T, U, V středy stran AB, BC, CD, DA. Dokažte, že úsečka SU půlí úsečku VT. [Úsečka ST je střední příčkou trojúhelníku ACB a úsečka VU je střední příčkou trojúhelníku ACD. Proto jsou úsečky ST a VU rovnoběžné s úhlopříčkou AC, a tedy i rovnoběžné navzájem. Analogicky jsou rovnoběžné i úsečky VS a TU. Proto je $STUV$ rovnoběžník a jeho úhlopříčky, tedy úsečky SU a VT, se půlí.]

N4. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ACB| = 90°$ a $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány rovnostranné trojúhelníky ABP a ACN. Označme S střed úsečky AB. a) Dokažte, že přímky NS a AP jsou rovnoběžné. b) Dokažte, že trojúhelníky ABC a NSA jsou shodné. c) Nechť T, U jsou těžiště po řadě trojúhelníků ABP, ACN. Dokažte, že trojúhelníky TAU a PAC jsou podobné a určete koeficient jejich podobnosti. [a) Nechť M je střed strany AC. Přímka SM je střední příčkou trojúhelníku ABC, proto je rovnoběžná se stranou CB, tedy kolmá ke straně AC. Proto i přímka SM je osou strany AC, na které leží z rovnoramennosti trojúhelníku ACN i bod N. Tedy přímka NS je kolmá ke straně AC. K ní je kolmá i přímka AP, jelikož $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BAP| = 90°$. b) Platí též $|\sphericalangle SAN| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAN| = 90°$. Jelikož přímka SN je osou strany AC rovnoramenného trojúhelníku ACN, je i osou jeho protilehlého úhlu, tedy $|\sphericalangle SNA| = 30°$. Trojúhelníky ABC a NSA se tak shodují ve velikostech vnitřních úhlů a v délkách stran AN a AC, jsou tak podle věty *usu* shodné. c) Těžnice v rovnostranném trojúhelníku je rovněž osou úhlu, proto $|\sphericalangle TAU| = 30° + 30° + 30° = 90° = |\sphericalangle PAC|$. Těžnice rovnostranného trojúhelníku se stranou dlouhou x má délku $x\sqrt{3}/2$ (Pythagorova věta), tedy vzdálenost jeho vrcholu od těžiště je $2/3 \cdot x\sqrt{3}/2 = x\sqrt{3}/3$. Proto $|AT|/|AP| = |AU|/|AC| = \sqrt{3}/3$. Podobnost trojúhelníků TAU a PAC tak plyne z věty *sus* a hledaný koeficient podobnosti je $\sqrt{3}/3$.]

N5. Uvažujme trojúhelník ABC, ve kterém je $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky AC označme D, obraz C podle AB označme E a obraz B podle AD označme F. Dokažte, že $|CF| = |DE|$. [70–B–S–2]

Následující doplňující úlohy jsou zaměřeny na vyjádření délek v trojúhelníku pomocí délek jeho stran, resp. velikostí úhlů. Takové vyjádření můžeme použít při částečném nebo úplném řešení některých geometrických úloh. Ve všech úlohách používáme standardní značení délek stran a velikostí úhlů trojúhelníku ABC.

D1. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC s ostrým úhlem α je roven $a/(2\sin\alpha)$. [Označme O střed kružnice opsané, R její poloměr a S střed strany BC. Z věty o obvodovém a středovém úhlu má úhel BOC velikost 2α. Z rovností $|OB| = |OC| = R$ plyne $|\sphericalangle BOS| = \alpha$. Z pravoúhlého trojúhelníku

BOS tak získáme $\sin\alpha = |BS|/R$, tedy $R = a/(2\sin\alpha)$. Na závěr dodejme, že v případě $\alpha \geqq 90°$ dostaneme $R = a/(2\sin(180° - \alpha))$, což je týž vztah, jelikož $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. (Tvrzení také okamžitě plyne z rozšířené sinové věty $a/\sin\alpha = 1/(2R)$.)]

D2. V trojúhelníku ABC platí $\alpha = 45°$. Pomocí délek stran b, c vyjádřete a) výšku ke straně c, b) délku strany a. [a) $v_c = b\sqrt{2}/2$, b) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}}$. Nechť P je pata výšky ke straně c. a) Trojúhelník APC je rovnoramenný pravoúhlý s přeponou AC, proto $|CP| = v_c = b/\sqrt{2} = b\sqrt{2}/2$. Stranu a dopočítáme Pythagorovou větou z pravoúhlého trojúhelníku BCP, kde $|PB| = |c - b/\sqrt{2}|$,

$$a^2 = \left(c - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2},$$

tedy $a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}}$.]

D3. Vyřešte předchozí úlohu pro trojúhelník, ve kterém je $\alpha = 135°$. [Opět získáme $|CP| = b/\sqrt{2}$. Jediný rozdíl je v tom, že nyní $|PB| = c + b/\sqrt{2}$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník BCP dostaneme $a = \sqrt{b^2 + c^2 + bc\sqrt{2}}$. Postupy z obou úloh lze zobecnit pro libovolný úhel α a získáme tak vztah $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ známý jako *kosinová věta*. V případě tupého úhlu α platí $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$.]

D4. Nechť ABC je trojúhelník s tupým úhlem α. Patu výšky z vrcholu C označíme P. Pomocí délek jeho stran vyjádřete $|PA|$. Jak se změní výsledek, pokud by byl úhel α ostrý? [a) Nechť $|PA| = x$. Z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ACP a BCP vyjádříme výšku dvěma způsoby $b^2 - x^2 = |CP|^2 = a^2 - (c + x)^2$. Pomocí prvního a třetího výrazu získáme $x = |PA| = (a^2 - b^2 - c^2)/2c$. V případě $\alpha < 90°$ postupujeme analogicky s tím rozdílem, že $|PB| = (a - x)$ a dostaneme $|PA| = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$.]

D5. Nechť ABC je trojúhelník a t_c délka jeho těžnice ke straně c. Dokažte, že platí

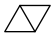
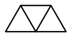
$$t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

[Důkaz uvedeme pro trojúhelník s ostrými úhly α, β. Důkazy zbývajících případů, které se jen drobně liší, přenecháváme čtenáři. Inspirováni předchozími úlohami označíme P patu výšky z bodu C a M střed strany AB. Označme dále $|PA| = x$ a $|PB| = y$, přičemž $x + y = c$. Potom $|PM| = |x - y|/2$ a délku těžnice můžeme vyjádřit z pravoúhlého trojúhelníku CMP jako $t_c^2 = v_c^2 + (x - y)^2/4$. Dokazovanou rovnost tak umíme ekvivalentně upravit na $4v_c^2 + (x - y)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (x + y)^2$ a následně na $4v_c^2 = 2(a^2 - y^2) + 2(b^2 - x^2)$. Důkaz dokončíme užitím rovností $a^2 - y^2 = b^2 - x^2 = v_c^2$, které plynou z Pythagorových vět pro trojúhelníky ACP a CPB.]

D6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [71–B–I–2]

D7. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s nejdelší stranou BC. Uvnitř jeho stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Uvažujme dále body F a G tak, že $ABCF$ a $ACBG$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $|FD| = |GE|$. [71–B–S–2]

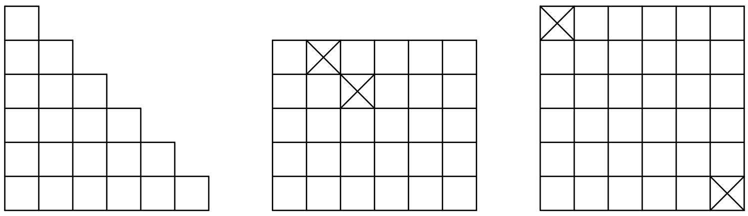
D8. Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$. [64–B–I–5]

3. *Pro která přirozená čísla n lze rovnostranný trojúhelník se stranou délky n rozřezat na shodné dílky tvaru: a)* *, b)* *? Dílky jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky 1.* (Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

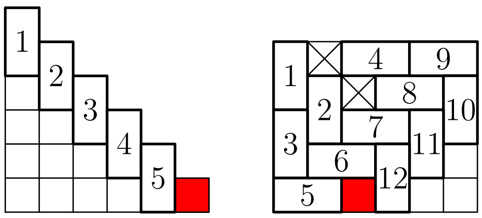
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která lze čtverec o rozměrech $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×2. [Právě všechna sudá n. Pro $n = 2k$ rozřežeme čtverec $2k \times 2k$ na $k \times k$ čtverců 2×2 a každý z nich na dva obdélníky 2×1. Pro liché n má čtverec obsah n^2 a jeden dílek má obsah 2. Avšak číslo n^2 není dělitelné dvěma, proto úkol splnit nejde.]

N2. Uvažujme následující tři útvary složené z jednotkových čtverců, ze kterých vystřihneme čtverce označené křížkem. Lze zbytky útvarů rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×2?



[Ve všech případech je odpověď ne. Pro první dva útvary to umíme zdůvodnit přímo: z velkého útvaru budeme postupně vyřezávat dílky tak, jak jsou vynuceny. Pořadí vyřezávání je znázorněno na obrázcích čísly – máme-li vyřezané dílky po některé číslo, pak musíme vyříznout také dílek s následujícím číslem (pokud takový existuje). V obou případech však po tomto nuceném řezání dílků oddělíme červený čtvereček 1×1.

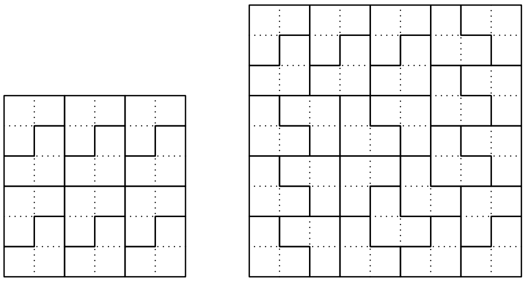


Pro všechny tři útvary lze ukázat nemožnost pokrytí užitím jiné myšlenky: Každý z útvarů vybarvíme šachovnicově bílou a černou barvou. Jeden dílek zakrývá jeden čtvereček bílé a jeden černé barvy. Pokud bychom tedy uměli útvar rozstříhat na dílky, tak má stejně černých a bílých čtverečků, což ovšem není pravda.]

N3. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n je součet prvních n lichých čísel roven číslu n^2. [Pro $n = 1$ máme součet $1 = 1^2$, což je pravda. Pokud je součet prvních

n lichých čísel roven n^2, tak po přičtení $(n+1)$-tého lichého čísla, tedy čísla $2(n+1)-1$, dostaneme součet $n^2+2n+1=(n+1)^2$, jak jsme měli ukázat. Tedy postupným přidáváním dalších čísel se rovnost zachová. Takový typ důkazu se nazývá *matematická indukce* a můžete se o něm více dozvědět v doplňujících úlohách.]

N4. L-*tromino* se skládá ze tří jednotkových čtverců uspořádaných do tvaru písmene L. Pro které hodnoty n z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ lze čtverec $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru L-tromina? [Pro 6 a 9. Čtverec má obsah n^2 a jeden dílek má obsah 3. Proto n^2 musí být dělitelné třemi, a tedy i n. Čtverec 3×3 nelze rozřezat na základě rozboru případů. Čtverce 6×6 a 9×9 rozřežeme jako na obrázcích.]



Zájemcům doporučujeme seznámit se s matematickou indukcí. Jedná se o užitečnou důkazovou metodu, zejména v situacích založených na opakování jisté myšlenky. Můžete se s ní seznámit v brožuře Antonína Vrby *Princip matematické indukce* z edice *Škola mladých matematiků*.

D1. Pro která kladná celá čísla lze čtverec $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru L-tromina? [Pro násobky tří větší než 3. Stačí doplnit řešení návodné úlohy N4 o rozřezání čtverců, jejichž délka strany je dělitelná třemi. Čtverec $6k \times 6k$ rozřežeme na obdélníky 3×2 a každý z nich rozřežeme na dvě L-tromina. Čtverce rozměrů $(6k+3)\times(6k+3)$ rozřežeme užitím matematické indukce. Jelikož umíme rozřezat obdélník 3×2, tak umíme rozřezat i obdélník $3 \times 6k$. Čtyři takovéto obdélníky uložíme podél hranice čtverce $(6k+3) \times (6k+3)$, čímž nám ve středu zůstane čtverec $(6k-3) \times (6k-3)$, který rozřežeme podle indukčního předpokladu.]

D2. Uvažujme čtverečkovou síť skládající se z $2^n \times 2^n$ jednotkových čtverečků. Libovolný jednotkový čtvereček obarvíme černě. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n lze tuto čtverečkovou síť pokrýt dílky tvaru L-tromina tak, aby jedině tento černý čtvereček zůstal nepokrytý. [Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n=1$ ve čtverci 2×2 tvoří bílá políčka právě jedno L-tromino. Předpokládejme, že tak lze pokrýt čtverec rozměrů $2^n \times 2^n$, bez ohledu na polohu černého čtverečku. Čtverec $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ rozdělíme na čtyři čtverce $2^n \times 2^n$. V těch třech z nich, které nemají černé políčko, zabarvíme černě rohová políčka ve středu velkého čtverce; tato tři políčka lze pokrýt L-trominem. A podle indukčního předpokladu nyní i každý ze čtverců $2^n \times 2^n$ lze pokrýt L-trominy. Podrobnější řešení lze najít v řešení 8. úlohy 1. zimního kola KMS 2009/2010.]

D3. Určete všechna celá čísla $n \geqq 4$, pro která lze čtverec se stranou délky n rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×4. [Všechny násobky čtyř. Pokud je n liché, tak čtverec má obsah n^2, což není násobek obsahu dílku. Pokud je $n = 4k + 2$, tak rozdělíme čtverec na $(2k + 1) \times (2k + 1)$ menších čtverců 2×2, které šachovnicově obarvíme. Každý dílek se musí skládat ze dvou černých a ze dvou bílých čtverců 1×1, tedy obsahuje stejně černých a bílých čtverců. Ovšem celý čtverec obsahuje více čtverců jedné barvy. Pro $n = 4k$ rozřežeme čtverec na $k \times k$ čtverců o rozměrech 4×4 a každý z nich třemi rovnoběžnými řezy na čtyři obdélníky 1×4.]

D4. Uvažujme čtverečkovanou síť $n \times n$ skládající se z $n \times n$ jednotkových čtverečků. Do této sítě chceme bez překrývání umístit několik pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s přeponou délky 2, jejichž vrcholy se nacházejí ve vrcholech čtverečkové sítě. Navíc, každá strana čtverečku se musí nacházet v právě jednom trojúhelníku (uvnitř nebo na obvodu). Najděte všechna přirozená čísla, pro která je to možné. [KMS 39. ročník, 1. část, 2. kolo, úloha 8]

4. *a) Najděte příklad dvojmístného přirozeného čísla n takového, že číslo $1/n$ má ve svém desetinném zápise za desetinnou čárkou právě dvě číslice.*

b) Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla k, l existují právě dvě kladná racionální čísla, která mají v desetinném zápise za desetinnou čárkou právě k číslic a jejich převrácené hodnoty právě l číslic.

(Desetinný zápis uvažujeme nejkratší možný.) (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zjistěte, kolik desetinných míst mají za desetinnou čárkou (v nejkratším možném zápisu) čísla 1/8, 1/32, 1/256. [Mají postupně 3, 5, 8 číslic. Kromě písemného vydělení to lze zjistit i rozšířením zlomku vhodnou mocninou pěti: $1/8 = 5^3/10^3$, $1/32 = 5^5/10^5$ a $1/256 = 5^8/10^8$.]

N2. Zjistěte, pro která kladná celá čísla n má číslo a) $n/3$, b) $n/30$, c) $n/18$ konečný desetinný zápis. Svá tvrzení zdůvodněte. [a), b) násobky tří, c) násobky devíti. Má-li zlomek ve jmenovateli mocninu čísla 10, má konečný desetinný zápis. Platí i opačná implikace. Toto pozorování je přesněji formulováno a dokázáno v následující návodné úloze. Zlomky $n/3$ a $n/30$ z částí a), b) obsahují ve jmenovateli prvočíslo 3. Mají-li konečný desetinný zápis, potom i jejich čitatel, tedy číslo n, musí být dělitelný třemi, jelikož mocniny 10 jsou dělitelné jedině prvočísly 2 a 5. Naopak pokud $n = 3k$ pro nějaké k, tak dostáváme zlomky $k/1$ a $k/10$ s konečným desetinném zápisem. V části c) je jmenovatel dělitelný 3^2, takže podobně dostaneme, že i n musí být dělitelné devíti. Konečně pokud $n = 9k$, tak $n/18 = k/2 = 5k/10$, což má konečný desetinný zápis.]

N3. Dokažte, že kladné racionální číslo q má ve svém nejkratším desetinném zápisu právě $d \geqq 1$ číslic za desetinnou čárkou právě tehdy, když $q = c/10^d$ pro nějaké kladné celé číslo c nedělitelné deseti. [Předpokládejme, že q má d číslic v desetinném zápise. Pokud v čísle q posuneme desetinnou čárku o d míst doprava, tedy jej vynásobíme číslem 10^d, dostaneme celé číslo $c = q \cdot 10^d$. Navíc c nemůže končit nulou, protože šlo o nejkratší možný zápis čísla q. Proto $q = c/10^d$. Naopak máme-li $q = c/10^d$ takto zapsané, potom po vydělení čísla c číslem 10^d dostaneme za desetinnou čárkou právě d posledních číslic čísla c. Jelikož c není dělitelné deseti, tak jde o nejkratší možný zápis.]

N4. Najděte všechna kladná celá čísla vyhovující části a) soutěžního úlohy. [Řešení této úlohy najdete v komentářích, které budou zveřejněny na stránkách MO po termínu odevzdání úloh domácího kola.]

N5. Najděte všechny dvojice nesoudělných kladných celých čísel x, y, pro která platí a) $xy = 441$, b) $xy = 13^4 \cdot 14^n$, kde n je dané kladné celé číslo. [a) $(1, 3^2 \cdot 7^2)$, $(3^2, 7^2)$, $(7^2, 3^2)$, $(3^2 \cdot 7^2, 1)$, b) $(1, 13^4 \cdot 14^n)$, $(2^n, 13^4 \cdot 7^n)$, $(7^n, 13^4 \cdot 7^n)$, $(13^4, 14^n)$, $(14^n, 13^4)$, $(2^n \cdot 13^4, 7^n)$, $(7^n \cdot 13^4, 2^n)$, $(13^4 \cdot 14^n, 1)$. a) Rozložíme $441 = 3^2 \cdot 7^2$. Jelikož x a y jsou nesoudělná, tak prvočíslo 3 se může vyskytnout v prvočíselném rozkladu jen jednoho z čísel x, y. Totéž platí pro prvočíslo 7. Máme proto čtyři možné dvojice (x, y), jak jsme uvedli. Část b) řešíme podobně s tím, že uvažujeme rozklad $2^n \cdot 7^n \cdot 13^4$, který nyní obsahuje tři prvočísla. Dostaneme osm řešení.]

D1. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel (a, b), pro které platí

$$4^a = b^2 + 7.$$

[KMS 42. ročník, 1. část, 2. kolo]

D2. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je součin $(2^n + 1)(3^n + 2)$ dělitelný číslem 5^n. [61–A–S–3]

D3. Rozhodněte, zda existuje 2024 navzájem různých kladných celých čísel s následující vlastností: Uvážíme-li všechny možné podíly dvou různých čísel (uvažujeme a/b i b/a), dostaneme čísla s konečnými desetinnými rozvoji (za desetinnou čárkou) navzájem různých nenulových délek. [CAPS 2024, úloha 1]

D4. Rozhodněte, zda existují kladná celá čísla n a k taková, že

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla. [67–A–II–4]

D5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru $2^a + 3^b - 5^c$, přičemž a, b, c jsou nezáporná celá čísla. [68–A–III–5]

Zájemcům o získání celistvějších poznatků z oblasti dělitelnosti celých čísel doporučujeme brožuru Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* z edice *Škola mladých matematiků* a také brožuru Aloise Apfelbecka *Kongruence*, která obsahuje širokou potřebnou teorii k práci se zbytky po dělení.

5. *Označme k kružnici opsanou ostroúhlému trojúhelníku ABC. Její obraz v souměrnosti podle přímky BC protíná polopřímky opačné k BA a CA po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že úsečky CD a BE se protínají na kružnici k. Určete všechny možné velikosti úhlu BAC.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Před řešením této úlohy vám doporučujeme seznámit se s větou o obvodovém a středovém úhlu a s vlastnostmi tětivových čtyřúhelníků. K objevení tohoto vztahu navádí první návodná úloha. Zájemcům doporučujeme brožurku Stanislava Horáka *Kružnice* z edice *Škola mladých matematiků*.

N1. Na kružnici k se středem O jsou dány body B a C tak, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Na delším oblouku BC zvolme bod A a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby měl úhel BAC co největší velikost. c) Jak se změní výsledek předešlé úlohy, pokud bod A můžeme zvolit libovolně na kružnici k (s výjimkou bodů B, C)? [V rovnoramenných trojúhelnících BOC, COA a AOB spočítejte úhly nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ. Dejte si pozor na správné sčítání, resp. odečítání úhlů podle toho, zda je bod O uvnitř nebo vně trojúhelníku ABC. V a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, stejně jako v b) nezávisle na volbě δ. V c) vyjde 120°. Řešení úkolu b) lze přímo zobecnit na důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu. Řešení úlohy c) zase ukazuje, že v tětivovém čtyřúhelníku je součet velikostí protilehlých úhlů roven 180°.]

N2. Připomeňte si následující tvrzení: Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet velikostí jeho protějších úhlů je 180°. [Důkaz naleznete například. na str. 20 (Věta 5) ve zmiňované brožuře *Kružnice*.]

N3. Dokažte, že obloukům stejné délky téže kružnice přísluší obvodové úhly stejné velikosti. [Označme uvažované oblouky AB a CD a S střed kružnice. Jelikož mají stejnou délku, tak jim přísluší shodné středové úhly ASB a CSD. Z rovnosti středových úhlů tak vyplývá i rovnost obvodových úhlů.]

N4. Označme S střed oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A. Dokažte, že AS je osou úhlu BAC. [Oblouky BS a SC jsou stejně dlouhé, proto jim přísluší stejné obvodové úhly BAS a CAS.]

N5. Dvě shodné kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Na kružnici k zvolíme bod C a na kružnici l bod D tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky CD. Dokažte, že $|BC| = |BD|$. [Úhly ACB a ADB jsou obvodové úhly příslušející delšímu oblouku AB shodných kružnic k a l, jsou tak shodné, z čehož přímo plyne $|BC| = |BD|$.]

N6. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané a M střed přepony AC. Předpokládejme, že body B, I, M, C leží na jedné kružnici. Určete velikost úhlu BAC. [60°. Jedná se o zjednodušenou úlohu 72–B–I–6.]

D1. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. [69–B–S–2]

D2. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. [63–B–I–3]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patami výšek D, E, F ležícími po řadě na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F ve středové souměrnosti podle středu strany AB leží na přímce DE. Určete velikost úhlu BAC. [57–A–II–3, slovenská verze]

D4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC? [68–A–II–3]

D5. Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu u vrcholu A, pokud mají kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod. [67–B–I–3]

6. *Kladná reálná čísla x, y, z splňují nerovnosti $xy \geqq 2$, $xz \geqq 3$, $yz \geqq 6$. Jakou nejmenší hodnotu může nabývat výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Návodné úkoly N1 až N3 jsou zaměřeny na úpravy výrazů na *čtverce*, čímž myslíme druhé mocniny mnohočlenů (v našem případě dvojčlenů). Takové úpravy jsou často klíčové při dokazování nerovností či hledání extrémů výrazů, což si můžete vyzkoušet v úlohách N4 a N9. Úloha N7 upozorňuje na nesprávné řešení úlohy N5, která je podobná i samotné soutěžní úloze. Úloha N8 naznačuje, jak lze tuto nesprávnou úvahu opravit.

N1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b$. [Dokazovanou nerovnost ekvivalentně upravíme na $(a - b)^2 \geqq 0$.]

N2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$, přičemž rovnost nastává jedině pro $a = b = c$. [Naznačíme dva důkazy. První: ekvivalentní úpravy začínající vynásobením dvěma vedoucí k nerovnosti $(a-b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$; rovnost nastává právě tehdy, když všechny závorky jsou rovny nule, tedy když $a = b = c$. Druhý: sečteme nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, $c^2 + a^2 \geqq 2ca$ a vydělíme dvěma.]

N3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí
a) $5a^2 + 6b^2 + 7c^2 \geqq 4ab + 6ac + 8bc$, b) $3a^2 + 3b^2 + 8c^2 \geqq 4(ab + ac + bc)$,
c) $5a^2 + 5b^2 + 2c^2 \geqq 2ab + 4ac + 4bc$.
Určete všechny trojice čísel a, b, c, pro které nastává rovnost. [a) Nerovnost získáme součtem nerovností $2a^2+2b^2 \geqq 4ab$, $3a^2+3c^2 \geqq 6ac$, $4b^2+4c^2 \geqq 8bc$, které jsme dostali vynásobením nerovnosti z úlohy N1 vhodnými konstantami. Rovnost musí nastat ve všech třech nerovnostech, z čehož máme $a = b = c$. b) Sečteme nerovnosti $2a^2+2b^2 \geqq 4ab$, $a^2+(2c)^2 \geqq 4ac$, $b^2+(2c)^2 \geqq 4bc$. Rovnost nastává pro $a = b = 2c$. c) Sečteme nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $4a^2 + c^2 \geqq 4ac$, $4b^2 + c^2 \geqq 4bc$. Rovnost nastává pro $a = b = c/2$. Všechny tři nerovnosti lze také dokázat úpravou na $2(a - b)^2 + 3(a - c)^2 + 4(b - c)^2 \geqq 0$, $2(a - b)^2 + (a - 2c)^2 + (b - 2c)^2 \geqq 0$, resp. $(a - b)^2 + (2a - c)^2 + (2b - c)^2 \geqq 0$.]

N4. Kladná reálná čísla x, y splňují $xy \geqq 2$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $4x^2 + 9y^2$? [24. Platí $4x^2 + 9y^2 = (2x - 3y)^2 + 12xy \geqq 12xy \geqq 24$. Tuto hodnotu dostaneme, pokud $2x = 3y$ a $xy = 2$, tedy pokud $x = \sqrt{3/2}$ a $y = \sqrt{8/3}$.]

N5. Nezáporná reálná čísla x, y, z splňují $x + y \geqq 6$, $x + z \geqq 8$, $y + z \geqq 10$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + y^2 + z^2$? [56. Pokud $z > 8$, pak

$x^2 + y^2 + z^2 \geqq z^2 > 64$. Pokud $z \leqq 8$, tak čísla $8 - z$ a $10 - z$ jsou kladná, proto platí $x^2 + y^2 + z^2 \geqq (8 - z)^2 + (10 - z)^2 + z^2 = 3(z - 6)^2 + 56 \geqq 56$. Hodnota 56 je menší než v případě $z \geqq 8$ a je dosažena pro $(x, y, z) = (2, 4, 6)$ (dokonce je to jediný případ). Proto 56 je hledaná nejmenší hodnota. Ukážeme ještě jeden způsob, jak ukázat nerovnost $x^2+y^2+z^2 \geqq 56$, na kterém ilustrujeme několik užitečných myšlenek. Budeme se opírat o hypotézu, že nejmenší hodnoty bude výraz nabývat pro $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. (K této hypotéze lze dojít na základě zkoušení různých hodnot.) Budeme vycházet z nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ z úlohy N1. Na levé straně chceme dostat nějaké z výrazů x^2, y^2, z^2 a na pravé straně nějaké z výrazů x, y, z. To dostaneme, pokud do nerovnosti z role N1 dosadíme jednu proměnnou a jednu konstantu. Dosadíme-li proměnnou x, tak chceme zvolit konstantu 2, aby rovnost nastávala v případě $x = 2$ jako v naší hypotéze. Tak dostaneme, že platí nerovnost $x^2 + 2^2 \geqq 4x$. Podobně platí i $y^2 + 4^2 \geqq 8y$ a $z^2 + 6^2 \geqq 12z$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $x^2 + y^2 + z^2 \geqq 4x + 8y + 12z - 56$. Pro dokončení důkazu nám stačí vhodně odhadnout hodnotu výrazu $4x + 8y + 12z$, k čemuž můžeme využít nerovnosti ze zadání. Konkrétně platí $4x + 8y + 12z - 56 = 4(x + z) + 8(y + z) - 56 \geqq 4 \cdot 8 + 8 \cdot \cdot 10 - 56 = 56$, čímž je důkaz ukončen. Ještě vysvětlíme, jak jsme přišli k úpravě $4x+8y+12z = 4(x+z)+8(y+z)$. Obecně chceme najít takové konstanty a, b, c, pro které bude platit $4x+8y+12z = a(x+y)+b(x+z)+c(y+z)$. Po roznásobení a porovnání koeficientů při x, y, z dostaneme, že musí platit $a + b = 4$, $a + c = 8$, $b + c = 12$. Vyřešením této soustavy dostaneme, že $(a, b, c) = (0, 4, 8)$.]

N6. Nezáporná reálná čísla x, y, z splňují $x + y \geqq 4$, $x + z \geqq 8$, $y + z \geqq 10$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + y^2 + z^2$? [56. Úlohu lze řešit stejně jako předchozí.]

N7. Rozhodněte, zda je následující řešení úlohy N5 úplné a korektní: Jelikož chceme dostat co nejmenší hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$, tak chceme, aby i výrazy $x + y$, $x + z$, $y + z$ nabývaly co nejmenší hodnoty, tedy aby v nich byla rovnost. Dostáváme tak soustavu tří rovnic $x+y = 6$, $x+z = 8$, $y+z = 10$, která má jediné řešení $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. Nejmenší hodnota je tedy dosažena u tohoto řešení a je to $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$. [Řešení není správné, neboť neobsahuje korektní důkaz, že při jiných volbách čísel nemůžeme dostat hodnotu výrazu menší než 56. To, že taková úvaha není korektní, lze vidět, když ji použijeme k řešení úlohy N6. Tehdy dostaneme soustavu $x + y = 4$, $x + z = 8$, $y + z = 10$ s řešením $(x, y, z) = (1, 3, 7)$, pro které $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 3^2 + 7^2 = 59$. Avšak nejmenší možná hodnota je stále 56, protože jsme v řešení úlohy N5 nerovnost $x + y \geqq 6$ nevyužili.]

N8. Dokažte, že při řešení úlohy N5 se stačí omezit na trojice x, y, z, pro které platí alespoň dvě z rovností $x + y = 6$, $x + z = 8$, $y + z = 10$. [Na začátek uvedeme, že pro $(x, y, z) = (2, 4, 6)$ nabývá výraz hodnoty 56 a jsou splněny všechny tři rovnosti. Vezměme si trojici (x, y, z), pro kterou platí nejvýše jedna z uvedených rovností. Vyřešíme případ, kdy $x + y > 6$ a $x + z > 8$; zbývající dva případy jsou analogické. Nechť $x' = \max(6 - y, 8 - z)$. Pokud x' není kladné, tak platí $y \geqq 6$ a $z \geqq 6$. Zkoumaný výraz má tak hodnotu alespoň $6^2 + 8^2 = 100$, což je více než hodnota 56 pro $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. V opačném případě je x' kladné a platí $x' + y \geqq 6$, $x' + z \geqq 8$ a alespoň v jedné z nerovností nastává rovnost.

Avšak $x' < x$, tedy hodnotu výrazu jsme tím zmenšili a zvýšili počet dosažených rovností. Pokud i po této úpravě platí nejvýše jedna z rovností, tak můžeme úpravu ještě jednou zopakovat. Proto pro každou trojici (x, y, z), pro kterou nastává rovnost v nejvíce jedné z nerovností, má výraz větší hodnotu než pro některou trojici s alespoň dvěma dosaženými rovnostmi.]

N9. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $9x^2 + 36/x^2$, pokud a) $x \in (0, \infty)$, b) $x \in (0, 1\rangle$, c) $x \in \langle 2, \infty)$. [a) 36, b) 45, c) 45. Výraz lze doplnit na čtverec $9x^2 + 36/x^2 = (3x - 6/x)^2 + 36 \geqq 36$. Rovnost nastane, když je argumentem druhé mocniny nula, tedy pro $x = \sqrt{2} \in (0, \infty)$. Tím jsme ukázali, že 36 je nejmenší hodnota výrazu pro část a). Uvnitř druhé mocniny je výraz, který je rostoucí pro $x \in (0, \infty)$. To plyne z faktu, že pro $0 < x_1 < x_2$ lze nerovnost $3x_1 - 6/x_1 < 3x_2 - 6/x_2$ ekvivalentně upravit na $0 < (x_2 - x_1)(3 + 6/(x_1x_2))$. Výraz $3x - 6/x$ nabývá nulové hodnoty pro $x = \sqrt{2}$. Pro $x \in (0, \sqrt{2}\rangle$, a tedy i pro $x \in (0, 1\rangle$, je výraz rostoucí a záporný, proto jeho druhá mocnina $(3x - 6/x)^2$ je klesající. Nejmenší možnou hodnotu výrazu pro část b) tak dostaneme pro největší možné x, tedy pro $x = 1$, což odpovídá hodnotě 45. V části c) je výraz $3x - 6/x$ kladný a rostoucí, tedy i jeho druhá mocnina bude kladná a rostoucí. Nejmenší možnou hodnotu výrazu tak získáme pro $x = 2$, což odpovídá hodnotě 45.]

D1. Dokažte, že pro libovolná dvě nezáporná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$\frac{x + y}{2} \geqq \sqrt{xy},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x = y$. [Jelikož na obou stranách máme nezáporná čísla, nerovnost je ekvivalentní s $(x + y)^2/4 \geqq xy$, a ta zase s $(x - y)^2 \geqq 0$.]

D2. Dokažte, že pro libovolné kladné reálné konstanty k, ℓ je funkce $y = kx - \ell/x$ pro kladná čísla x rostoucí. [Funkce kx je rostoucí a funkce ℓ/x je pro $x > 0$ klesající, tedy funkce $-\ell/x$ je rostoucí. Zkoumaná funkce $kx + (-\ell/x)$ je tedy součet dvou rostoucích funkcí, a proto je rostoucí. Jiným řešením je ukázat, že pro libovolné $0 < x_1 < x_2$ platí $kx_1 - \ell/x_1 < kx_2 - \ell/x_2$, jelikož je tato nerovnost ekvivalentní $(x_1 - x_2)(k + \ell/(x_1x_2))) < 0$, což v našem případě zjevně platí.]

D3. Uvažujme funkci $y = kx^2 + \ell/x^2$ pro kladné reálné číslo x a kladné reálné konstanty k, ℓ. Nechť $M = \sqrt[4]{\ell/k}$. Dokažte, že tato funkce nabývá minima pro $x = M$, přičemž pro $x \in (0, M\rangle$ je klesající a pro $x \in \langle M, \infty)$ je rostoucí. [Jde o obecnou verzi úlohy N9. Předpis funkce vhodně doplníme na čtverec: $y = (\sqrt{k} \cdot x - \sqrt{\ell}/x)^2 + 2\sqrt{k\ell}$. Výraz v závorce je podle úlohy D2 rostoucí a nabývá nuly právě pro $x = M$. Proto je výraz v závorce pro $x \leqq M$ záporný, tedy jeho absolutní hodnota, a tedy i druhá mocnina klesá. Pro $x \geqq M$ je zase kladný, a proto funkce pro $x \geqq M$ roste.]

D4. Uvažujme funkci $y = kx + \ell/x$ pro kladné reálné číslo x a kladné reálné konstanty k, ℓ. Nechť $M = \sqrt{\ell/k}$. Dokažte, že tato funkce nabývá minima pro $x = M$, přičemž pro $x \in (0, M\rangle$ je klesající a pro $x \in \langle M, \infty)$ je rostoucí. [Podobně jako v předchozí úloze řešení vyplývá z úpravy $y = (\sqrt{kx} - \sqrt{\ell/x})^2 + 2\sqrt{k\ell}$. Důkaz, že funkce $\sqrt{kx} - \sqrt{\ell/x}$ je rostoucí, je podobný důkazu v úloze D2.]

D5. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

kde x je libovolné reálné číslo. Pro která x výraz V této hodnoty nabývá? [64–B–II–2]

D6. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b=2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

[68–B–II–1]

D7. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

[68–B–I–4]

D8. Reálná čísla a, b splňují vztah $a - b \geqq 2$. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $a^4 + b^4$. [Hledaná nejmenší hodnota je 2, které dosáhneme pro $a = 1$, $b = -1$. Důkaz nerovnosti $a^4 + b^4 \geqq 2$ naleznete v řešení 3. úlohy 1. letního kola KMS 2012/2013.]

D9. Najděte maximální hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ pro reálná čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ jsou z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. [68–A–II–4]

D10. Součet 74 (ne nutně různých) reálných čísel z uzavřeného intervalu $\langle 4, 10\rangle$ je 356. Určete největší možnou hodnotu součtu jejich druhých mocnin. [73–A–II–4]