

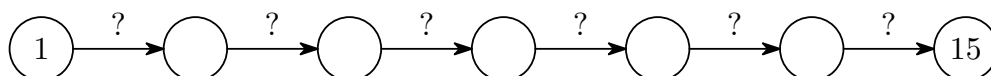
I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15. (I. Jančígová)

Možné řešení. Úlohu lze znázornit jako tzv. početního hada, kde místo otazníků můžeme dosadit buď $+1$, nebo $\times 2$:



Po násobení dvěma je výsledkem sudé číslo. Tedy před lichým číslem je nutně $+1$. Před sudým číslem může být jak $+1$, tak $\times 2$.

Postupně odzadu najdeme dvě vyhovující řešení:



Poznámka. Uvedená řešení jsou jediná možná. Jakýkoli jiný způsob, jak z čísla 1 dostat číslo 15 pomocí dovolených operací, vyžaduje větší počet kroků.

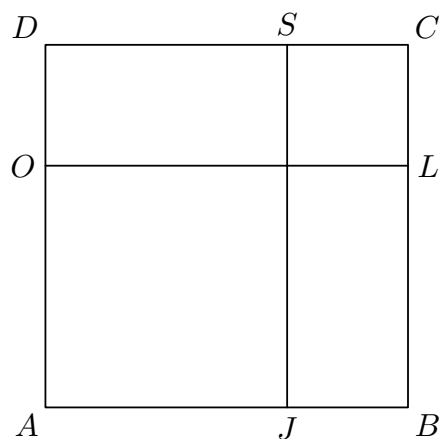
Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,
- procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.

Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu?

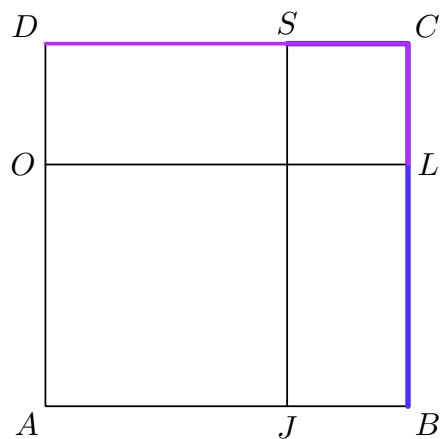
(M. Macko)



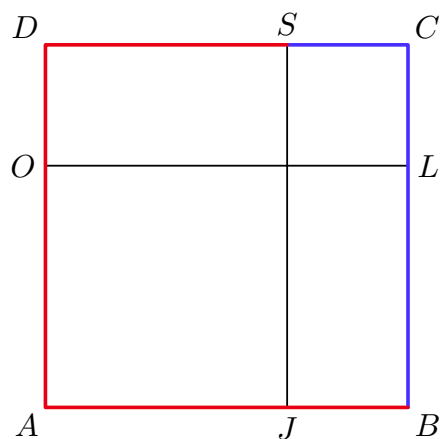
Poznámka: obrázek je pouze ilustrační, orientační body ze zadání jsou označeny jejich počátečními písmeny.

Možné řešení. Místo popisu ze zadání úlohy budeme užívat značení z obrázku.

Procházky zmiňované ve druhém bodě mají společnou část odpovídající úsečkám LC a CS . Protože obě procházky jsou stejně dlouhé, úsečky BL a SD jsou stejně dlouhé. Protože $ABCD$ je čtverec, také úsečky LC a CS jsou stejně dlouhé. Tedy čtverec $ABCD$ je složen ze dvou čtverců a dvou stejných obdélníků (se stranami shodnými s úsečkami BL a LC).



Procházky zmiňované v prvním bodě dávají dohromady obvod čtverce $ABCD$. Obvod tohoto čtverce sestává ze čtyř stejných stran, tedy měří $4 \cdot 240 = 960$ (m). První procházka je dvakrát delší než ta druhá, tedy druhá procházka odpovídá třetině obvodu čtverce $ABCD$. Délka druhé procházky je $960 : 3 = 320$ (m).



Druhá procházka sestává z úseček BC a CS . Úsečka BC je stranou čtverce, tedy délka úsečky CS je

$$|CS| = 320 - 240 = 80 \text{ (m)}.$$

Z předchozího víme, že úsečky AO a BL jsou stejně dlouhé a že úsečky LC a CS jsou stejně dlouhé. Úsečky BL a LC dávají dohromady stranu BC celého čtverce. Celkem platí:

$$\begin{aligned} |AO| &= |BL| = |BC| - |LC| = \\ &= |BC| - |CS| = 240 - 80 = 160 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Přímá cesta od akátu k ořechu měří 160 metrů.

Poznámka. Pro procházky zmiňované v prvním bodě platí:

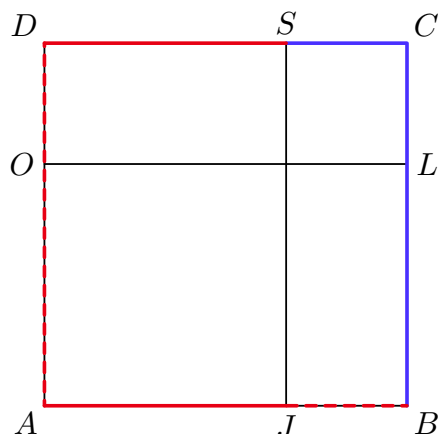
- První procházka je dvakrát delší než druhá. Tedy rozdíl jejich délek je stejný jako délka kratší procházky, a ta je

$$|BC| + |CS| = |BL| + 2|LC|.$$

- Rozdíl procházek odpovídá úsečkám AJ a DS , tedy měří

$$|AJ| + |DS| = |BL| + |BL|.$$

- Dohromady dostáváme $|BL| = 2|LC|$ neboli $|BC| = 3|LC|$.
- Protože $|BC| = 240$ m, platí $|LC| = 80$ m, a tedy $|AO| = |BL| = 160$ m.

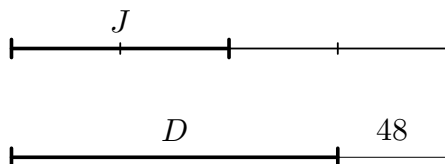


Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka? (M. Dillingerová)

Možné řešení. Podmínky ze zadání lze znázornit pomocí úseček (J představuje počet Jančiných jahod, D počet Dančiných jahod):



Odtud vyvozujeme, že 48 odpovídá polovině Jančiných jahod.

Janka nabírala $2 \cdot 48 = 96$ jahod, Danka nasbírala $3 \cdot 48 = 144$ jahod.

Poznámka. Podmínky ze zadání lze s předchozím značením zapsat jako

$$J + \frac{1}{2}J = D, \quad 2J = D + 48.$$

Odtud dostáváme

$$D + \frac{1}{2}J = 2J = D + 48,$$

a tedy $\frac{1}{2}J = 48$.

Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(M. Petrová)

Možné řešení. Výsledné číslo po násobení sedmi bylo pětimístné. Tedy původní mohlo být buď čtyřmístné, nebo pětimístné. Úlohu můžeme znázornit jako algebrogram (šedá hvězdička nemusí být nahrazena číslicí):

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline ? 2 8 8 7 \end{array}$$

Součin čísla 7 s jednomístným číslem má pokaždé jinou číslici na místě jednotek:

0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 48, 56, 63, 72.

Díky této vlastnosti jednoznačně odzadu určíme poslední čtyři hvězdičky:

$$\begin{array}{r} * 1 8 4 1 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline ? 2 8 8 7 \end{array}$$

Postupně jsme počítali $1 \cdot 7 = 7$ (žádný přechod přes desítku), $4 \cdot 7 = 28$ (přes desítku přechází dvojka), $8 \cdot 7 + 2 = 58$ (přes desítku přechází pětka), $1 \cdot 7 + 5 = 12$ (přes desítku přechází jednička).

- Pokud původní číslo bylo čtyřmístné, pak výpočet vypadal takto:

$$\begin{array}{r} 1 8 4 1 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline 1 2 8 8 7 \end{array}$$

- Pokud původní číslo bylo pětímístné, pak jeho první číslice byla 1 (aby výsledek byl pětímístný). Výpočet pak vypadal takto:

$$\begin{array}{r} 1 1 8 4 1 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline 8 2 8 8 7 \end{array}$$

První číslice Anežčina výsledku byla buď 1, nebo 8.

Z5–I–5

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti. (M. Macko)

Možné řešení. Součet 30 lze pomocí tří daných sčítanců získat jedině takto:

$$30 = 8 + 9 + 13 = 8 + 11 + 11 = 9 + 10 + 11.$$

Součet 24 lze pomocí dvou daných sčítanců získat jedině takto:

$$24 = 10 + 14 = 11 + 13.$$

První součet odpovídá třem kamarádům v kině, druhý dvěma kamarádům na fotbale. Uvedené možnosti kombinujeme tak, aby se doplňovaly, zbývající čísla odpovídají dvěma kamarádům doma:

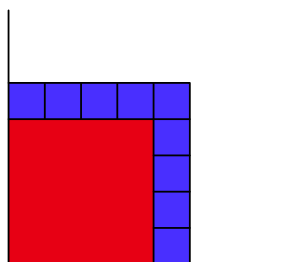
v kině	na fotbale	doma
8, 9, 13	10, 14	11, 11
8, 11, 11	10, 14	9, 13
9, 10, 11	11, 13	8, 14

Podmínka s Ondřejovým věkem může být splněna pouze ve druhém a třetím případě: Ondřej má buď 9, nebo 8 roků.

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti. (M. Macko)

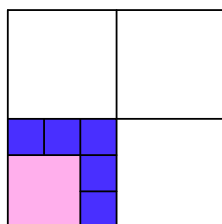


Možné řešení. Postupně probereme možnosti podle velikosti první dlaždice:

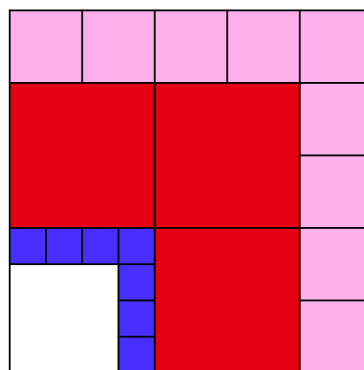
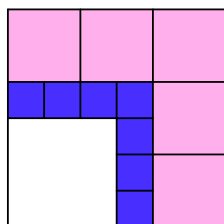
- K první dlaždici se stranou 1 dm nelze přikládat jiné dlaždice ze zadání.



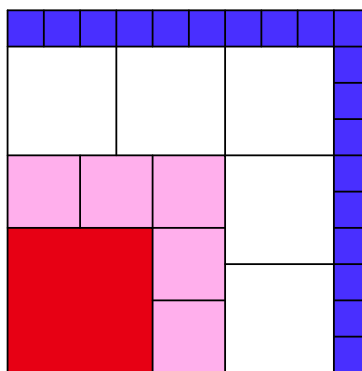
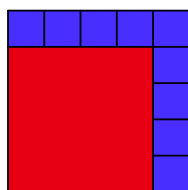
- K první dlaždici se stranou 2 dm lze přikládat jedině dlaždice se stranou 1 dm a poté jedině ty se stranou 3 dm. Zbývající dlaždice se stranou 4 dm už přikládat nelze.



- K první dlaždici se stranou 3 dm lze přikládat jedině dlaždice se stranou 1 dm a poté buď ty se stranou 2 dm, nebo ty se stranou 4 dm. V prvním případě zbývají dlaždice se stranou 4 dm, a ty přikládat nelze. Ve druhém případě zbývají dlaždice se stranou 2 dm, a ty přikládat lze.



- K první dlaždici se stranou 4 dm lze přikládat buď dlaždice se stranou 1 dm, nebo dlaždice se stranou 2 dm. V prvním případě zbývají dlaždice se stranami 2 dm a 3 dm, a ty přikládat nelze (v žádném pořadí). Ve druhém případě zbývají dlaždice se stranami 1 dm a 3 dm, a ty přikládat lze (v opačném pořadí).



Děvčata mohla pokládat dlaždice buď v pořadí Blanka, Viola, Karmen, Růžena a použít $1 + 7 + 3 + 9 = 20$ dlaždic, nebo v pořadí Karmen, Růžena, Blanka, Viola a použít $1 + 5 + 5 + 19 = 30$ dlaždic.