

1. Rozhodněte, zda je možné označit hrany krychle čísly $1, 2, \dots, 12$ tak, aby každé číslo bylo použito a aby pro každý vrchol byl součet čísel hran, které z něj vycházejí, stejný.
(Mária Dományová)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že to není možné. Pro spor předpokládejme, že to možné je, a označme S součet čísel hran u každého z vrcholů. Protože každá hrana spojuje dva vrcholy, je její číslo započítáno do součtů u dvou vrcholů, a dvojnásobek součtu čísel u všech hran je tak roven $8S$. Platí tedy

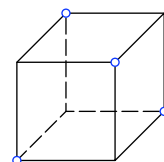
$$8S = 2(1 + 2 + \dots + 12) = 156$$

a odtud úpravou

$$S = \frac{156}{8} = 19,5.$$

Číslo S jakožto součet několika celých čísel musí být celé. To je spor, a tedy hrany krychle není možné požadovaným způsobem označit.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úvaha z předchozího řešení lze obměnit následovně: čtveřice vrcholů vyznačených na obrázku má tu vlastnost, že každá hrana krychle vychází z právě jednoho z nich. To znamená, že součet všech čísel u hran je roven $4S$, což vede na stejnou rovnost a spor s celočíselností S jako v předchozím řešení.



KOMENTÁŘ. Uvedená řešení jsou formulována jako důkaz sporem na základě stručného argumentu, který se může zdát obtížné vymyslet. Touto poznámkou bychom chtěli čtenáře přesvědčit, že se jedná o velmi přirozený argument. Nejprve se pokoušíme hranám nějakým způsobem přiřazovat čísla a zkoumáme, jak se chovají součty u jednotlivých vrcholů. Předpokládejme, že jedním takovým pokusem jsme přiřadili hranám kolem jednoho vrcholu čísla 5, 7 a 10. To dává součet 22, takže kolem obou krajních vrcholů hrany s číslem 1 musí být (disjunktní) dvojice čísel se součtem 21. Takovou dvojici máme ale už jen jednu (12 a 9), takže docházíme k závěru, že tato čísla byla jakožto ohodnocení trojice hran vycházejících ze stejného vrcholu krychle příliš velká. Obecněji, protože máme přesně dáno, která čísla máme k dispozici, tak zvolíme-li kolem jednoho vrcholu příliš velká čísla, nutně na jiné vrcholy zbydou čísla příliš malá na to, aby mohly součty u vrcholů vyjít všechny stejně. Tedy samotná hodnota součtů S nesmí být příliš vysoká ani příliš nízká. Na S se musejí sečíst nějaká tři čísla z množiny $\{1, \dots, 12\}$, tedy

$$1 + 2 + 3 = 6 \leq S \leq 10 + 11 + 12 = 33$$

– vidíme, že omezení získané rozбором situace jen u jediného vrcholu je velmi slabé. Podívejme se na dva protější vrcholy krychle. Ty nemají žádné společné hrany a čísla u nich se neopakují, takže sečtením čísel u těchto šesti hran dostaneme nerovnosti

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \leq 2S \leq 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57,$$

takže $10,5 \leq S \leq 28,5$, což už je těsnější odhad. Je zřejmé, že ideální by bylo do odhadu zapojit všech dvanáct čísel (pak by dvě nerovnosti přešly v jednu rovnost). Musíme si ale rozmyslet, na které vrcholy se podívat, ke kterému vrcholu započítat číslo které hrany a podobně, kteréžto úvahy jsou jádrem zmíněných výše uvedených řešení.

POZNÁMKA. Další možností je – podobně jako u první úlohy domácího kola – sestavit 8 rovnic (pro každý vrchol jedna) o třinácti neznámých (čísla u hran a součet S) typu $a + b + c = S$. Sečtením několika z nich a pomocí znalosti toho, která čísla se u hran vyskytují (víme, že jsou to čísla 1 až 12, každé právě jednou, neznáme ale jejich rozmístění) je také možné dojít k výpočtu hodnoty $S = 19,5$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky následovně:

- A1. Tvrzení, že to není možné: 1 bod
- A2. Označení společného součtu u vrcholů (S) nebo zkoumání této hodnoty: 1 bod
- A3. Odvození nějakého platného odhadu na S (např. jako v poznámce výše) nebo neplatné ale „rozumné“ rovnice pro S (např. $1 + \dots + 12 = 8S$): 1 bod
- A4. Sestavení správné rovnice pro S : 3 body
- A5. Argumentace neceločíselnosti S a formulace závěru: 1 bod

Celkově za neúplná řešení udělte $A1 + A2 + \max(A3, A4) + A5$ bodů.

2. Máte pravítko bez měřítka, které umožňuje pouze vést přímku libovolnými dvěma body, a kružítko, kterým lze rýsovat pouze kružnice s libovolným celočíselným poloměrem. Popište a zdůvodněte konstrukci rovnostranného trojúhelníku o straně délky $\sqrt{7}$.
(Tomáš Bárta)

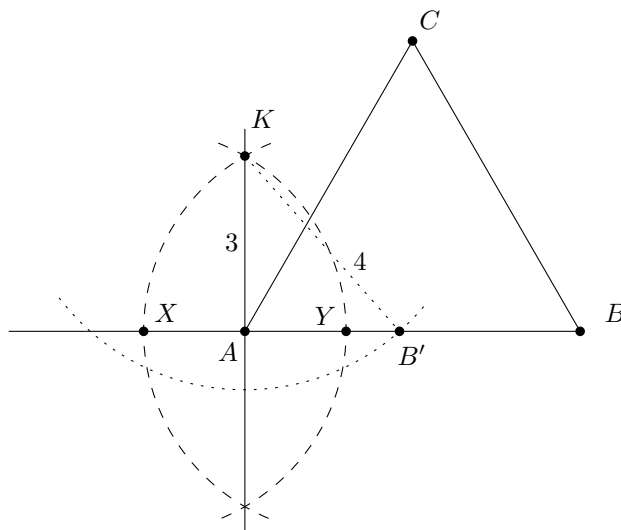
ŘEŠENÍ. Základní myšlenkou je rozdělit úlohu na dvě části: sestrojít úsečku délky $\sqrt{7}$ a za pomoci této schopnosti „oříznout“ větší rovnostranný trojúhelník – uvědomme si, že standardní postup konstrukce rovnostranného trojúhelníku o dané délce strany (kterou již máme sestrojenou jakožto úsečku) naše omezené kružítko dovoluje pouze pro celočíselné délky.

Pro první část využijeme Pythagorovu větu ve tvaru $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, kde c (délku přepony) a b (délku jedné odvěsny) zvolíme jako vhodná celá čísla. Nabízí se $c = 4$ a $b = 3$, neboť

$$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7.$$

Zbytek řešení obsahuje celý postup konstrukce (viz obrázek 1):

1. Standardním postupem sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC s nějakou celočíselnou délkou strany.
2. Bodem A vedeme kolmici p k přímce AB . To lze provést i s omezeným kružítkem (a pravítkem) takto: na přímce AB najdeme pomocí kružítko dva různé body X, Y tak, aby $|AX| = |AY| = r$ (bod A bude tedy středem úsečky XY) pro nějaké celé číslo r . Následně sestrojíme průsečíky kružnic o poloměru R (R celé, $R > r$) se středy v X a Y . Jejich spojnici je hledaná kolmice k přímce AB procházející bodem A .
3. Pomocí kružnice se středem v A a poloměrem 3 najdeme na přímce p bod K tak, že $|AK| = 3$ (máme dva průsečíky, z následujícího postupu je vidět, že nezáleží na tom, se kterým budeme pracovat).
4. Sestrojíme kružnici se středem v bodě K a poloměrem 4. Tato kružnice protne polopřímku AB v právě jednom bodě, který označíme B' .



Obr. 1 Konstrukce bodu B'

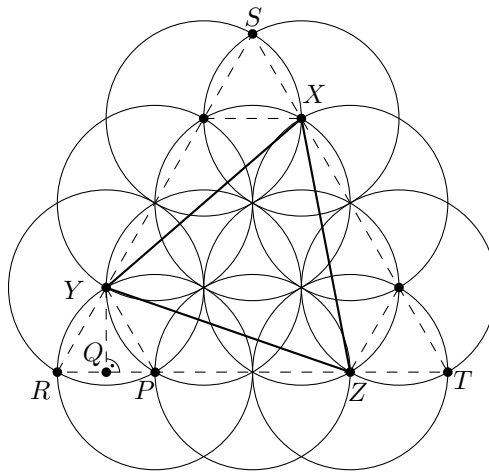
5. Trojúhelník AKB' je pravoúhlý s přeponou KB' délky 4 a odvěsnou AK délky 3, takže podle Pythagorovy věty platí

$$|AB'| = \sqrt{|KB'|^2 - |AK|^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$$

6. Analogickým postupem najdeme na polopřímce AC bod C' splňující $|AC'| = \sqrt{7}$.
 7. Narýsováním přímky $B'C'$ pak získáme trojúhelník $AB'C'$, který splňuje $|AB'| = |AC'| = \sqrt{7}$ a $|\sphericalangle B'AC'| = 60^\circ$, takže je rovnoramenný se základnou $B'C'$, a tedy (dle věty *sus*) rovnostranný.

JINÉ ŘEŠENÍ. Alternativní možností získání úsečky s délkou $\sqrt{7}$ je použití jedné z Eukleidových vět, kde se také vyskytují druhé mocniny délek. Například podle Eukleidovy věty o výšce v trojúhelníku PQR s patou S výšky z vrcholu P platí, že $|PS|^2 = |QS| \cdot |RS|$, takže volba $|QS| = 1$ a $|RS| = 7$ dává jednak správnou délku výšky a současně kružnici nad průměrem QR můžeme sestrojít naším omezeným kružítkem (délka jejího poloměru je $\frac{7+1}{2} = 4$). K získání požadované délky na polopřímce AB (obsahující stranu již sestrojeného rovnostranného trojúhelníku ABC) budeme délky 1 a 7 nanášet na kolmici k polopřímce AB vedenou bodem A , kterou sestrojíme stejně jako v předchozím řešení.

JINÉ ŘEŠENÍ. V tomto řešení ukážeme, že jako vrcholy hledaného trojúhelníku lze použít vhodné body jednotkové trojúhelníkové sítě. Sestrojíme kružnici o poloměru 1, na ní zvolíme libovolný bod, ten vezmeme jako střed další jednotkové kružnice. V dalším kroku vezmeme jako střed některý se získaných průsečíků a postup opakujeme, dokud nezískáme všechny označené body z obrázku 2.



Obr. 2

Pak $|YZ| = \sqrt{7}$, což lze ověřit např. pomocí kosinové věty v trojúhelníku YPZ

$$|YZ|^2 = |PY|^2 + |PZ|^2 - 2 \cdot |PY| \cdot |PZ| \cdot \cos |\sphericalangle ZPY| = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot \cos(120^\circ) = 7$$

nebo pomocí Pythagorovy věty použité v trojúhelnících PQY a ZQY (Q je pata kolmice z bodu Y na přímku PZ neboli střed příslušné jednotkové úsečky RP .)

$$|YZ|^2 = |QZ|^2 + |QY|^2 = |QZ|^2 + |PY|^2 - |PQ|^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 7.$$

Zbývá ukázat, že i úsečky XY a XZ mají stejnou délku. To je ale vidět ze symetrie celého obrázku, přesněji ze shodnosti trojúhelníků RZY , TXZ a SYX .

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

- V neúplných řešeních postupujících podle prvního nebo druhého vzorového řešení ohodnoťte kroky následovně:

A1. Nalezení vhodných délek pro Pythagorovu větu nebo ekvivalent: 2 body

A2. Popis konstrukce kolmice k přímce jejím daným bodem: 1 bod

A3. Popis zbytku konstrukce vhodného pravoúhlého trojúhelníku: 1 bod

A4. Použití rovnostranného trojúhelníku s celočíselnou délkou strany: 1 bod

A5. Dokončení konstrukce požadovaného rovnostranného trojúhelníku a příslušné zdůvodnění: 1 bod

Celkově za neúplná řešení udělte $A1 + A2 + A3 + A4 + A5$ bodů.

- Kroky řešení postupujících podle třetího vzorového řešení (s trojúhelníkovou sítí) ohodnoťte takto:

B1. Popis konstrukce vhodné části jednotkové trojúhelníkové sítě: 1 bod

B2. Nalezení vrcholů sítě tvořících úsečku délky $\sqrt{7}$ bez důkazu: 1 bod

B3. Nalezení vrcholů sítě tvořících rovnostranný trojúhelník o straně $\sqrt{7}$ bez důkazu: 2 body

B4. Důkaz tvrzení B2 nebo B3: 3 body

Za tato řešení dejte celkem $B1 + \max(B2, B3) + B4$ bodů.

- Kroky odlišných řešení ohodnoťte takto:

C1. Konstrukce úsečky délky $\sqrt{7}$ včetně zdůvodnění: 4 body

C2. Konstrukce rovnostranného trojúhelníku s již sestrojenou neceločíselnou délkou strany: 2 body

Za tato řešení dejte celkem $C1 + C2$ bodů.

3. *Přirozené číslo nazveme pětinnové, pokud přesně 20 % jeho dělitelů končí číslicí 5.*

a) *Nalezněte nějaké pětinnové číslo.*

b) *Dokažte, že každé pětinnové číslo má přesně 60 % dělitelů končících číslicí 0.*

(Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Necht n má prvočíselný rozklad $n = 2^a \cdot 5^b \cdot m$ pro nějaká celá čísla $a, b \geq 0$ a přirozené číslo m nesoudělné s 2 i s 5. Podobně jako v řešení druhé úlohy domácího kola ukážeme, že počet dělitelů* čísla n je

$$d(n) = (a+1)(b+1)d(m),$$

kde $d(m)$ je počet dělitelů čísla m . Každý takový dělitel je totiž tvaru

$$2^i \cdot 5^j \cdot k,$$

kde $i \in \{0, 1, \dots, a\}$, $j \in \{0, 1, \dots, b\}$ a k je dělitel čísla m , přičemž různé trojice (i, j, k) dávají různé dělitele. Tedy máme $a+1$ možností při výběru exponentu i , $b+1$ možností při výběru exponentu j a $d(m)$ možností při výběru dělitele k (viz např. doplňující úlohu D1 ke druhé soutěžní úloze domácího kola). Dělitel čísla n končí číslicí 5 právě tehdy, když je dělitelný 5 a zároveň není dělitelný 2. Takový dělitel musí mít ve svém prvočíselném rozkladu:

- prvočíslo 2 s exponentem 0 (jediná možnost),
- prvočíslo 5 s exponenty $1, 2, \dots, b$ (celkem b možností),
- libovolný dělitel čísla m ($d(m)$ možností).

Počet dělitelů končících číslicí 5 je tedy $1 \cdot b \cdot d(m)$. Podmínka 20 % ze zadání říká, že tento počet tvoří pětinu všech dělitelů, neboli

$$\frac{b \cdot d(m)}{(a+1)(b+1)d(m)} = \frac{1}{5}. \quad (1)$$

Po zkrácení kladným číslem $d(m)$ a dalších úpravách dostáváme postupně

$$\begin{aligned} \frac{b}{(a+1)(b+1)} &= \frac{1}{5}, \\ 5b &= (a+1)(b+1), \\ ab + a - 4b + 1 &= 0, \\ b(a-4) &= -a-1, \\ b &= \frac{a+1}{4-a}. \end{aligned}$$

Jelikož jsou čísla a , $a+1$ i b nezáporná, musí platit $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ a vyzkoušením všech čtyř hodnot dostaneme jediné celočíselné řešení $a = 3$, $b = 4$.

Proto $n = 2^3 \cdot 5^4 \cdot m = 5000 \cdot m$, přičemž na hodnotě m nezáleží (musí ovšem být nesoudělná s 2 i s 5). S touto charakterizací všech pětinnových čísel oba úkoly soutěžní úlohy snadno dokončíme.

* V celém řešení dělitelem myslíme kladný dělitel. Pokud tvrzení v části b) platí pro kladné dělitele, pak zřejmě platí i pro záporné, takže zmíněné tvrzení platí, ať už dělitele v zadání interpretujeme jako výhradně kladné, nebo všechny celočíselné.

- a) Zvolíme nejjednodušší možnost $m = 1$. Pak $n = 5000$ je pětinné číslo.
 b) Postupujeme analogicky jako v úvodu řešení. Dělitel čísla $n = 2^3 \cdot 5^4 \cdot m$ končí číslicí 0, pokud je dělitelný 10 (tedy 2 i 5). Exponent u 2 tohoto dělitele můžeme vybrat třemi způsoby (z celkem čtyř), exponent u 5 čtyřmi způsoby (z celkem pěti), dělitele m pak $d(m)$ způsoby. Podíl dělitelů pětinného čísla, které končí nulou, je tedy roven

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot d(m)}{4 \cdot 5 \cdot d(m)} = \frac{3}{5} = 60\%.$$

POZNÁMKA. Ukážeme dvě alternativní řešení rovnice (1). Vztah pro b lze dále upravit na

$$b = \frac{a+1}{4-a} = -1 + \frac{5}{4-a}.$$

Protože a i b jsou celá nezáporná čísla, $4-a$ je kladným dělitelem 5, tedy $a = 3$.

Ještě jinou možností je rozložit výraz na levé straně rovnice

$$ab + a - 4b + 1 = 0$$

jako

$$0 = ab + a - 4b + 1 = (a-4)(b+1) + 5,$$

tedy $(a-4)(b+1) = -5$. Protože a, b jsou nezáporná celá čísla, je $b+1 \geq 1$. Číslo -5 lze rozložit na součin dvou celých čísel, kde druhý činitel je kladný, pouze dvěma způsoby jako $(-5) \cdot 1$ nebo $(-1) \cdot 5$. Pak

- $a-4 = -5$, z čehož $a = -1$, což nelze,
- $a-4 = -1$, z čehož $a = 3$, pak $b+1 = 5$, neboli $b = 4$.

Jediným řešením je opět dvojice exponentů $(a, b) = (3, 4)$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme řešení, které explicitně nepracuje se vzorcem pro počet dělitelů. Předpokládejme nejprve, že se v prvočíselném rozkladu pětinného čísla n vyskytují pouze prvočísla 2 a 5. Všechna taková čísla uspořádáme do následující tabulky obsahující v políčku na i -tém řádku a j -tém sloupci číslo $5^{i-1} \cdot 2^{j-1}$.

1	2	2 ²	2 ³	...
5	10	20	40	...
5 ²	50	100	200	...
5 ³	250	500	1000	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Všechny dělitele čísla v políčku P pak tvoří obdélníkovou „podtabulku“ s pravým dolním rohem v P a levým horním rohem shodným s levým horním rohem celé tabulky (políčko s číslem 1). Takovým podtabulkám budeme říkat krátce jen obdélníky. (Na výše uvedeném obrázku uvažujeme políčko (2, 3) s číslem 20 a jemu příslušný obdélník se všemi jeho děliteli je podbarven.)

Číslo končí číslicí 5 právě tehdy, když je dělitelné 5, ale nikoli 2. V tabulce to odpovídá přesně těm políčkům, která leží v prvním sloupci a neleží v prvním řádku.

Budeme nyní hledat takové obdélníky, v nichž je podíl těchto políček v tabulce roven $\frac{1}{5}$. Necht' má obdélník s sloupců. V každém řádku je právě jedno políčko v prvním sloupci, tedy podíl dělitelů končících číslicí 5 je menší než $1/s$. Proto $s < 5$ (rovnost vylučuje první řádek, kde žádné číslo končící pětkou není).

Pokud má obdélník 2 sloupce a r řádků, tak podmínka pro podíl zní

$$\frac{r-1}{2r} = \frac{1}{5}$$

a lze ji roznásobením převést na lineární rovnici s jediným řešením $r = \frac{5}{3}$, což není přirozené číslo. Pro 3 sloupce řešíme

$$\frac{r-1}{3r} = \frac{1}{5},$$

což dává opět neceločíselné $r = \frac{5}{2}$. Pro čtyři sloupce má rovnice

$$\frac{r-1}{4r} = \frac{1}{5}$$

řešení $r = 5$. V tomto obdélníku tvořeném celkem dvaceti čísly je právě $3 \cdot 4 = 12$ čísel končících číslicí 0, tyto dělitele pětinnového čísla

$$2^3 \cdot 5^4 = 5000$$

– řešení části a) – tedy tvoří $\frac{12}{20} \cdot 100\% = 60\%$.

V obecném případě, tedy pokud připouštíme i jiné prvočinitele pětinnového čísla n než 2 nebo 5, zapíšeme toto číslo stejně jako v předchozím řešení jako $n = 2^a \cdot 5^b \cdot m$ pro nějaké m nesoudělné s 2 a 5. Tabulku nyní použijeme tak, že do políčka na i -tém řádku a j -tém sloupci napíšeme všechny dělitele n , které mají v prvočíselném rozkladu u pětky exponent $i-1$ a u dvojky exponent $j-1$, tedy čísla tvaru $5^{i-1} \cdot 2^{j-1} \cdot k$, kde k je dělitelem m . Označíme-li $d(m)$ počet dělitelů čísla m , vidíme, že na každém políčku je $d(m)$ čísel. Protože v úloze vystupují jen *podíly* počtů dělitelů různých typů, můžeme postupovat stejně jako ve zmíněném speciálním případě $m = 1$, kdy bylo v každém políčku tabulky jediné číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních postupujících podle prvního vzorového řešení ohodnoťte kroky následovně:

A1. Obecné vyjádření podílu dělitelů končících 5 nebo 0: 2 body

A2. Sestavení a vyřešení rovnice pro a, b : 2 body

A3. Nalezení pětinnového čísla (dokončení části a)): 1 bod

A4. Výpočet podílu dělitelů pětinnových čísel končících na 0 (dokončení části b)): 1 bod

Celkově za neúplná řešení udělte $A1 + A2 + A3 + A4$ bodů.

Za neúplná řešení postupující podle druhého vzorového řešení udělte body takto:

B1. Popis tabulky a pozorování o tom, že dělitele nějakého jejího čísla tvoří obdélník: 2 body

B2. Použití tabulky pro nalezení pětinnového čísla: 1 bod

B3. Použití tabulky pro vyřešení části b): 2 body (ve speciálním případě pro $n = 2^a \cdot 5^b$), resp. 3 body (za obecné řešení)

Celkem udělte $B1 + B2 + B3$ bodů.

Za neúplná řešení postupující jiným způsobem udělte body takto:

C1. Část a): 2 body (1 za číslo, 1 za zdůvodnění)

C2. Část b): 4 body

Celkem udělte $C1 + C2$ bodů.