

## I. kolo kategorie Z5

## Z5–I–1

Pan Krbec s kocourem Kokešem prodávali na hradě Kulíkově vstupenky. V sobotu prodali 210 dětských vstupenek po 25 groších a také nějaké vstupenky pro dospělé po 50 groších. Celkem za ten den utržili 5 950 grošů.

Kolik prodali vstupenek pro dospělé? (M. Krejčová)

**Nápověda.** Kolik vybrali za vstupenky pro dospělé?

**Možné řešení.** Pan Krbec s kocourem Kokešem za dětské vstupenky vybrali celkem  $210 \cdot 25 = 5\,250$  grošů. Za vstupenky pro dospělé utržili  $5\,950 - 5\,250 = 700$ . Těchto vstupenek tedy prodali  $700 : 50 = 14$  kusů.

## Z5–I–2

Děti na táboře házely hrací kostkou a podle výsledků plnily následující úkoly:

1	jděte 1 km na západ
2	jděte 1 km na východ
3	jděte 1 km na sever
4	jděte 1 km na jih
5	stůjte na místě
6	jděte 3 km na sever

Po pěti hodech bylo Markovo družstvo 1 km východně od startu.

- Jakou trasu mohlo Markovo družstvo projít? Naznačte alespoň čtyři možnosti.
- Jaký mohl být celkový součet všech čísel, která tomuto družstvu padla? Určete všechny možnosti.

(E. Semerádová)

**Nápověda.** Které kombinace hodů se ve svých následcích vzájemně vyruší?

**Možné řešení.** Protože Markovo družstvo skončilo 1 km východně od startu, musela jim alespoň jednou padnout dvojka. Ostatní čtyři hody musely být takové, že po splnění odpovídajících úkolů bylo družstvo na původním místě (např. 3 km na sever a 3 km na jih). Všechny takové čtveřice hozených čísel jsou — až na pořadí — následující:

1 1 2 2, 1 2 3 4, 1 2 5 5, 3 3 4 4, 3 4 5 5, 4 4 4 6, 5 5 5 5.

Spolu s výše uvedenou dvojkou dostáváme všechny možné součty čísel, která mohla tomuto družstvu padnout:

8, 12, 15, 16, 19, 20, 22.

Možných tras, které mohlo Markovo družstvo projít, je nepřeborné množství. Např. pětice hodů 2 4 4 4 6 odpovídá trase 1 km na východ, třikrát 1 km na jih a 3 km na sever. Záměnou pořadí těchto hodů lze získat dalších 19 možností, celkem 20 různých tras. V ostatních případech to je obdobné, akorát se může stát, že různá pořadí představují jen různé způsoby projití téže trasy (viz např. pořadí 1 2 1 2 2, 2 1 1 2 2, 1 2 2 1 2). Pokud se v pětici hozených čísel vyskytuje 5 (stání na místě), počty možných tras se významně snižují.

### Z5–I–3

Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let. (L. Hozová)

**Nápověda.** Seřadte si psy podle jejich věku.

**Možné řešení.** U každého psa sledujeme čtyři znaky, u každého znaku rozlišujeme čtyři možnosti. Podle informací ze zadání můžeme začít přiřazovat možnosti např. podle stáří:

věk	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
rasa		vlkodav		jezevčík
jméno	Rubby	Bucki	Oddi	
země				

Tímto se nepřímo dozvídáme, že vlkodav se jmenoval Bucki. Z textu navíc víme, že vlkodav pocházel z Irska, identifikace jednoho z vybraných psů je tedy úplná.

Při druhém čtení si všimáme, že Rubby nebyl dalmatin, tedy to byl ovčák (z předchozího víme, že to nebyl vlkodav ani jezevčík). Dále ovčák pocházel z Belgie, tedy identifikace dalšího psa je úplná.

Mezi rasami, resp. jmény nyní umíme doplnit poslední chybějící možnost: Oddi — dalmatin, resp. jezevčík — Punťa.

Poslední informace ze zadání, kterou jsme zatím nepoužili, říká, že Punťa byl z Dolní Lhoty. Dalmatin Oddi tedy pocházel z Řecka a výsledné přiřazení vypadá

takto:

věk	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
rasa	ovčák	vlkodav	dalmatin	jezevčík
jméno	Rubby	Bucki	Oddi	Punťa
země	Belgie	Irsko	Řecko	Dolní Lhota

#### Z5-I-4

Maminka uvařila domácí rybízovou šťávu a nalévala ji do lahví. Lahve měla dvojí: malé s objemem 500 ml a velké s objemem 750 ml. Nakonec jí zbylo 12 malých lahví prázdných, ostatní lahve byly zcela naplněné. Poté maminka zjistila, že mohla šťávu nalévat tak, aby jí zbyly prázdné pouze velké lahve a všechny ostatní byly zcela naplněné.

Kolik prázdných lahví by jí v takovém případě zbylo? (M. Petrová)

**Nápověda.** Kolik šťávy mamince chybělo k naplnění všech lahví?

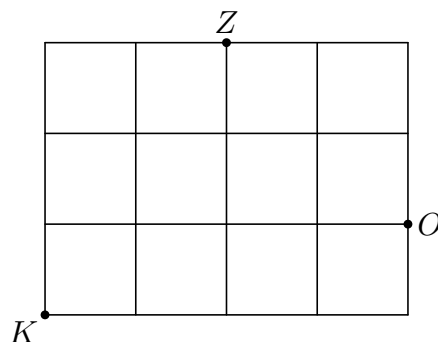
**Možné řešení.** Mamince zbylo nenaplněných 12 lahví, každá s objemem 500 ml. Do nich by se vešlo 6 000 ml šťávy ( $12 \cdot 500 = 6\,000$ ).

Stejné množství by se vešlo do 8 velkých lahví ( $6\,000 : 750 = 8$ ). Kdyby maminka nalévala šťávu druhým způsobem, zbylo by jí 8 prázdných velkých lahví.

**Poznámka.** Jedna velká lahev má stejný objem jako jeden a půl malé lahve čili dvě velké lahve mají stejný objem jako tři malé. Podle tohoto návodu lze lahve vhodně zaměňovat a vyhnout se počítání s velkými čísly: 12 malých lahví má stejný objem jako 8 velkých.

#### Z5-I-5

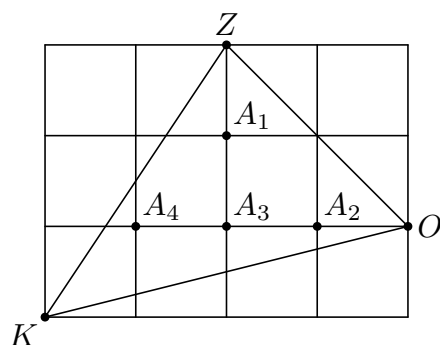
Ve čtvercové síti se čtverečky o rozměrech  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$  jsou vyznačeny tři uzlové body  $K$ ,  $O$  a  $Z$ . Určete uzlový bod  $A$  tak, aby obsah čtyřúhelníku  $KOZA$  byl  $4\text{ cm}^2$ . (E. Semerádová)



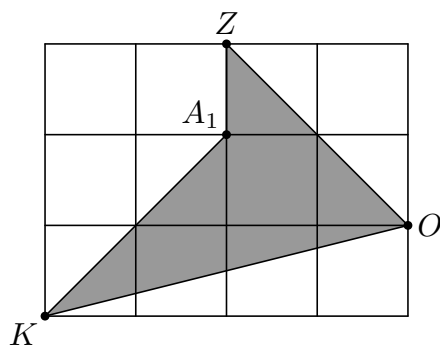
**Nápověda.** Určete nejprve obsah trojúhelníku  $KOZ$ .

**Možné řešení.** Obsah trojúhelníku  $KOZ$  je roven rozdílu obsahu okolního obdélníku a třech rohových trojúhelníků, tedy  $12 - 2 - 2 - 3 = 5\text{ (cm}^2\text{)}$ . Protože obsah čtyřúhelníku

$KOZA$  má být  $4\text{ cm}^2$ , tedy méně než obsah trojúhelníku  $KOZ$ , musí bod  $A$  ležet uvnitř tohoto trojúhelníku. Takové body jsou čtyři:



Obsahy odpovídajících čtyřúhelníků jsou navzájem různé, tedy nemůže vyhovovat víc než jeden z vyznačených bodů. Obdobným výpočtem jako na začátku zjišťujeme, že obsah  $4\text{ cm}^2$  má čtyřúhelník  $KOZA_1$ .



**Poznámka.** Obsahy ostatních tří čtyřúhelníků jsou  $1,5\text{ cm}^2$ ,  $3\text{ cm}^2$  a  $4,5\text{ cm}^2$ .

Způsob vykrojení čtyřúhelníku z daného trojúhelníku je určen značením vrcholů a souvisejícími zvyklostmi. Kromě čtyřúhelníku  $KOZA_1$  existují další čtyřúhelníky s obsahem  $4\text{ cm}^2$  a s vyznačenými body jako vrcholy:  $KOA_1Z$ ,  $KOA_2Z$  a  $KA_3OZ$ .

### Z5–I–6

Myslím si pětimístné číslo tvořené sudými číslicemi. Pokud prohodím číslici na třetím místě s jakoukoliv jinou, číslo se zmenší. Dále prozradím, že první číslice je dvojnásobkem poslední a druhá číslice je dvojnásobkem předposlední.

Jaké číslo si myslím? (M. Mach)

**Nápověda.** Umíte porovnat třetí číslici s ostatními?

**Možné řešení.** Číslo je tvořeno sudými číslicemi, tj. číslicemi 0, 2, 4, 6, 8, ne nutně všemi.

Vlastnost s prohazováním číslic znamená, že číslice na třetím místě je menší než kterákoli z předchozích číslic a současně větší než kterákoli z následujících.

Na prvních dvou místech jsou sudé číslice, které jsou dvojnásobky jiných sudých číslic, tj. některé z 0, 4, 8.

Mezi 0 a 0, ani mezi 4 a 2 nelze vložit žádné sudé číslo, které by bylo menší než první a současně větší než druhé. Jediné myslitelné číslo tedy je 88644.

## I. kolo kategorie Z6

## Z6–I–1

Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka.

Určete pořadí a délky skoků všech králíků. (S. Bednářová)

**Nápověda.** Kam doskočila Pečínka?

**Možné řešení.** Přímo ze zadání známe délku skoku Řízka, a to 2 730 mm. Skoky ostatních králíků odtud dopočítáme, přičemž vše jednotně převádíme na milimetry:

- Pečínka skočila o 1 100 mm méně než Řízek, tj. skočila 1 630 mm,
- Fašírka skočila o 150 mm méně než Pečínka, tj. skočila 1 480 mm,
- Guláš skočil o 200 mm dál než Fašírka, tj. skočil 1 680 mm.

Králíci si v soutěži vyskákali následující pořadí:

1. Řízek, 2. Guláš, 3. Pečínka, 4. Fašírka.

## Z6–I–2

Vzal jsem klasickou černobílou šachovnici, která byla tvořena  $8 \times 8$  čtvercovými políčky se stranami délky 3 cm. Políčka jsem v daném rámci přeskládal tak, že vznikl jeden černý obdélník, jeden černý čtverec a jeden souvislý bílý útvar. Jednotlivá políčka se i po přeskládání dotýkala celými stranami. Černé útvary se nedotýkaly (ani rohem) a každý z nich měl alespoň jednu stranu společnou s okrajem šachovnice.

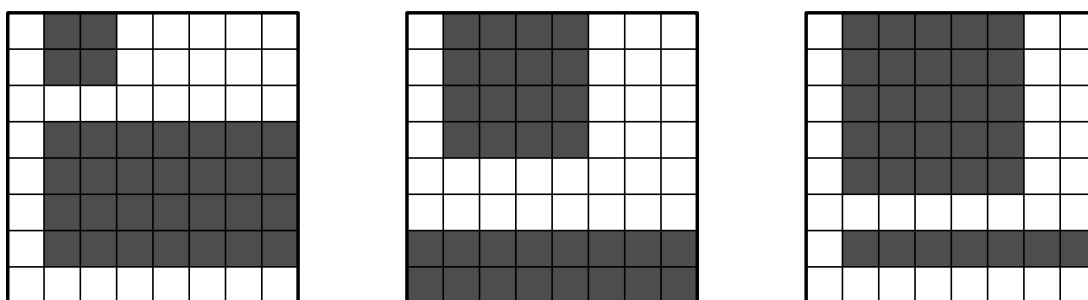
Určete největší možný obvod bílého útvaru a nakreslete, jak by v takovém případě mohl vypadat. (M. Mach)

**Nápověda.** Jaké rozměry mohl mít čtverec?

**Možné řešení.** Šachovnice má celkem 32 černých (a 32 bílých) políček, což musí být součet políček nově vzniklých černých útvarů. Černý čtverec tedy může mít rozměry nejvýše  $5 \times 5$  políček. Postupně probereme všechny možnosti podle velikosti černého čtverce, určíme, kolik políček zbývá na černý obdélník a jaké by mohl mít rozměry, a nakonec rozhodneme, zda je možné takové útvary umístit podle uvedených požadavků:

čtverec	na obdélník zbývá	lze umístit
$1 \times 1$	$1 \times 31$	NE
$2 \times 2$	$1 \times 28$	NE
$2 \times 2$	$2 \times 14$	NE
$2 \times 2$	$4 \times 7$	ANO
$3 \times 3$	$1 \times 23$	NE
$4 \times 4$	$1 \times 16$	NE
$4 \times 4$	$2 \times 8$	ANO
$5 \times 5$	$1 \times 7$	ANO

Všechny případy, které nelze uspokojivě umístit, přesahují některým svým rozměrem daný rámeček šachovnice. Ve vyhovujících případech je možné černé útvary umístit např. takto:



U každého případu lze umístění alespoň jednoho z černých útvarů pozměňovat, aniž by došlo k porušení některého z požadavků. Při takových změnách obvod bílého útvaru buď zůstává stejný, nebo se zmenší (pokud se některý z černých útvarů posune do rohu šachovnice).

Obvod bílého útvaru ve výše uvedených případech sestává z 50, 36, resp. 56 stran políček. Největší je tedy ve třetím případě a činí  $56 \cdot 3 = 168$  (cm).

### Z6–I–3

Maminka dala do mísy 56 jahod a 39 malin a zanesla je Emě, která si četla. Ema si čtení zpříjemnila mlsáním, a to tak, že si postupně brala po dvou náhodných kusech ovoce:

- Když vytáhla dvě maliny, vyměnila je u maminky za jednu jahodu a tu vrátila do mísy.
- Když vytáhla dvě jahody, jednu snědla a druhou vrátila do mísy.
- Když vytáhla jednu jahodu a jednu malinu, snědla jahodu a malinu vrátila do mísy.

Takto nějakou chvíli mlsala, až v míse zůstal jediný kus ovoce. Rozhodněte (a vysvětlete), jestli to byla jahoda, nebo malina. (L. Hozová)

**Nápověda.** Jí Ema všechno ovoce z mísy, nebo je vybírává?

**Možné řešení.** Ema se při mlsání důsledně vyhýbala malinám: pokud v jejím výběru byla jedna malina, vracela ji zpět do mísy, pokud vytáhla dvě maliny, vyměnila je za jahodu. Počet malin v míse se tak snižoval výhradně po dvou.

Protože na začátku byl v míse lichý počet malin, zůstával lichý také po každé transakci. Tedy posledním kusem ovoce v míse byla malina.

**Poznámka.** Na rozdíl od malin se počty jahod v míse měnily po jedné (a mohly se jak snižovat, tak zvyšovat). Parita původního počtu jahod nemá na řešení úlohy vliv.

#### Z6–I–4

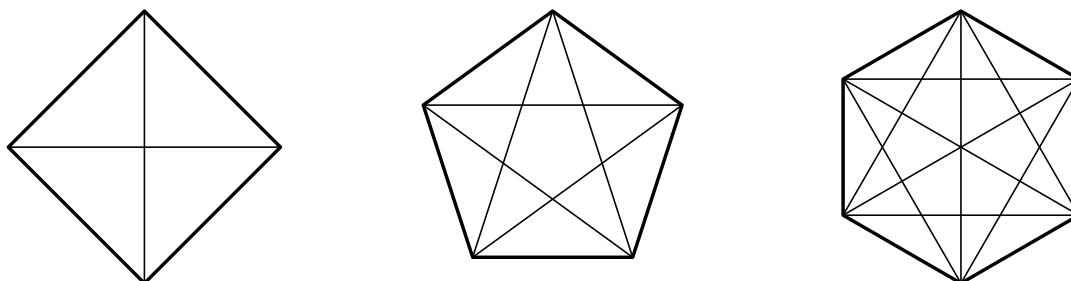
Ctirad naprogramoval dva spolupracující rýsovací roboty Mikyho a Nikyho. Miky umí sestřít čtverce, pravidelné pětiúhelníky a pravidelné šestiúhelníky. Během jednoho dne však rýsuje pouze navzájem shodné mnohoúhelníky. Niky do všech Mikyho mnohoúhelníků doplňuje všechny úhlopříčky.

1. V pondělí sestrojil Miky stejný počet úseček jako Niky. Které mnohoúhelníky rýsovali?
2. V úterý sestrojil Miky 18 úseček. Kolik jich sestrojil Niky?
3. Ve středu sestrojili Miky a Niky dohromady 70 úseček. Kolik mnohoúhelníků jim dal Ctirad rýsovat?

(M. Petrová)

**Nápověda.** Kolik úseček sestrojí Miky a Niky u čtverce, pětiúhelníku, resp. šestiúhelníku?

**Možné řešení.** Čtverec má dvě úhlopříčky, pětiúhelník pět a šestiúhelník devět:



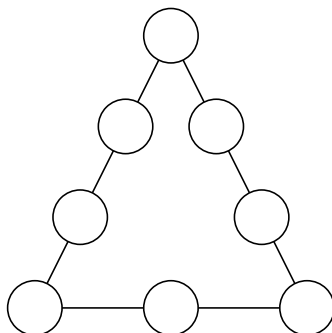
1. Stejný počet stran a úhlopříček má jedině pětiúhelník. V pondělí roboti rýsovali pětiúhelníky.
2. Miky sestrojil 18 stran, tedy nesestrojil ani čtverce, ani pětiúhelníky (18 není dělitelné ani 4, ani 5), sestrojil tři šestiúhelníky ( $18 : 6 = 3$ ). Ve třech šestiúhelnících je 27 úhlopříček ( $3 \cdot 9 = 27$ ). V úterý Niky sestrojil 27 úseček.
3. Celkový počet úseček u jednoho čtverce je 6, u jednoho pětiúhelníku 10 a u jednoho šestiúhelníku 15. Miky a Niky sestrojili dohromady 70 úseček, tedy nesestrojili ani čtverce, ani šestiúhelníky (70 není dělitelné ani 6, ani 15), sestrojili 7 pětiúhelníků ( $70 : 10 = 7$ ). Ve středu dostali za úkol narýsovat 7 pětiúhelníků.

### Z6-I-5

Petra vepisovala do kroužků čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, že každé bylo použito právě jednou a že součet čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.

Jaký největší součet mohla takto dostat? Uveďte příklad možného vyplnění.

(A. Bohiniková)

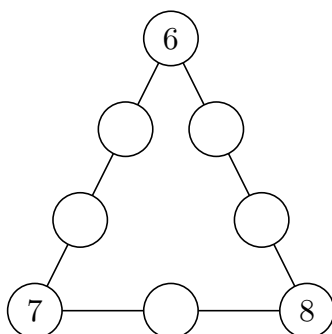


**Nápověda.** Kam má Petra vepisovat největší čísla?

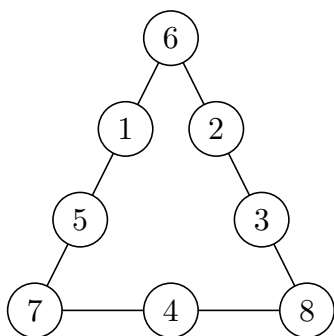
**Možné řešení.** Čísla ve vrcholech trojúhelníku přispívají do součtů na dvou stranách, zatímco ostatní čísla jenom na jedné. Větší čísla ve vrcholech trojúhelníku proto budou dávat větší součty.

Umístíme trojici největších čísel do vrcholů trojúhelníku a zkusíme doplnit zbylá čísla. Úvodní umístění lze provést celkem šesti způsoby, avšak podstatné je pouze číslo v hlavním (nejvyšším) vrcholu — případná doplnění pro prohozená čísla ve zbylých vrcholech jsou po dvojicích osově souměrná. Postupně probereme všechny možnosti.

- V hlavním vrcholu 6:

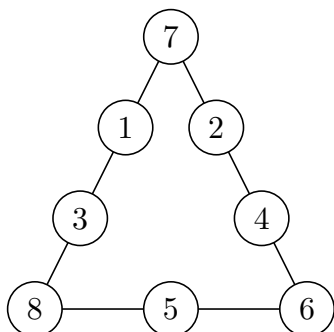


Součet vepsaných čísel na základně trojúhelníku je 15, na levém rameni 13, na pravém rameni 14. Čísla 1, 2, 3, 4, 5 potřebujeme umístit tak, aby kompenzovala rozdíly mezi stávajícími součty na jednotlivých stranách. To je možné udělat např. takto:



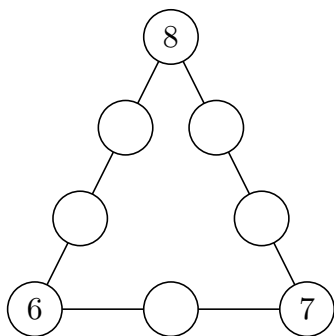
Součet čísel na každé straně je 19.

- V hlavním vrcholu 7: Obdobnou úvahou jako v předchozím případě dostáváme následující řešení:

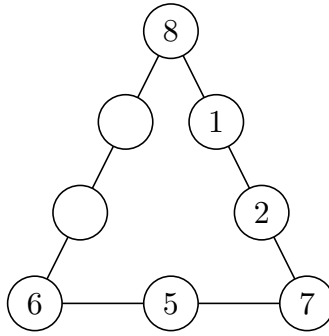


Součet čísel na každé straně je 19.

- V hlavním vrcholu 8:



Součet vepsaných čísel na základně trojúhelníku je 13, na levém rameni 14, na pravém rameni 15. Chybějící číslo na základně tedy má být o 1 větší než součet chybějících čísel na levém rameni a o 2 větší než součet čísel na pravém rameni. Druhý požadavek lze splnit následujícím doplněním, které je jednoznačné až na pořadí nové dvojice čísel na pravém rameni:



Na levé rameno tak zbývá dvojice 3 a 4, která však nevyhovuje prvnímu požadavku. V hlavním vrcholu tedy 8 být nemůže.

Největší možný součet, který lze požadovaným způsobem dostat, je 19. Dva příklady možného vyplnění jsou výše.

**Poznámka.** Součet daných čísel je  $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$ . Při umístění čísel 6, 7, 8 do vrcholů trojúhelníku vychází součet součtů čísel na jeho stranách  $36+6+7+8 = 57$ . Součet čísel na každé straně by tak měl být  $57 : 3 = 19$ . Tento postřeh nám umožňuje rychle doplnit chybějící číslo na základně trojúhelníku:

- pro 6 v hlavním vrcholu vychází  $19 - 7 - 8 = 4$ ,
- pro 7 v hlavním vrcholu vychází  $19 - 6 - 8 = 5$ ,
- pro 8 v hlavním vrcholu vychází  $19 - 6 - 7 = 6$ .

V prvních dvou případech se snadno doplní zbylá čísla do prázdných míst. Ve třetím případě doplnění není možné, neboť 6 by byla použita dvakrát.

## Z6–I–6

Anička a Maruška mají každá svoje oblíbené přirozené číslo. Vynásobíme-li Aničino číslo samo se sebou, vyjde nám stokrát větší číslo, než když vynásobíme Maruščino číslo samo se sebou. Sečteme-li Aničino a Maruščino oblíbené číslo, získáme číslo o 18 větší, než je polovina Aniččina čísla.

Určete Aničino a Maruščino oblíbené číslo. (E. Semerádová)

**Nápověda.** Kolikrát je Aničino číslo větší než Maruščino?

**Možné řešení.** Aničino číslo je desetkrát větší než Maruščino — jedině v tomto případě je součin Aniččina čísla se sebou samým roven stonásobku Maruščina čísla ( $10 \cdot 10 = 100$ ). Polovina Aniččina čísla je tedy pětkrát větší než číslo Maruščino.

Součet Aniččina a Maruščina čísla je o 18 větší než polovina Aniččina čísla. Proto je 18 součtem poloviny Aniččina čísla s číslem Maruščiny. Podle závěru předchozího odstavce je tento součet roven šestinásobku Maruščina čísla.

Tedy Maruščino číslo je 3 ( $18 : 6 = 3$ ) a Aniččino číslo je 30 ( $10 \cdot 3 = 30$ ).

**Poznámka.** Pokud Aniččino číslo označíme  $a$  a Maruščino číslo  $m$ , potom lze předchozí úvahy shrnout následovně:

- $a \cdot a = 100 m \cdot m$ , tedy  $a = 10m$ , tedy  $\frac{1}{2}a = 5m$ .
- $a + m = \frac{1}{2}a + 18$ , tedy  $18 = \frac{1}{2}a + m = 6m$ .
- $m = 18 : 6 = 3$  a  $a = 10m = 30$ .

Po úvodním postřehu ( $a = 10m$ ), je také možné postupně dosazovat přirozená čísla za  $m$ , vyjadřovat příslušný rozdíl ( $a + m - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a + m$ ) a kontrolovat, zda je nebo není roven 18:

$m$	1	2	3	4	...
$a$	10	20	30	40	...
$\frac{1}{2}a + m$	6	12	18	24	...

## I. kolo kategorie Z7

## Z7–I–1

Určete, která číslice je na 1000. místě za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji čísla  $\frac{9}{28}$ . (M. Krejčová)

**Nápověda.** Jak vypadá desetinný rozvoj uvedeného čísla?

**Možné řešení.** Desetinný rozvoj racionálního čísla  $\frac{9}{28}$  je

$$0,321\overline{42857},$$

kde opakující se část, sestávající ze šesti číslic, je označena pruhem.

Šest se do tisíce vejde 166krát a zbudou čtyři ( $1000 = 166 \cdot 6 + 4$ ). Mezi desetinnou čárkou a opakující se částí jsou dvě číslice. Tedy číslice na 1000. místě za desetinnou čárkou je stejná jako druhá číslice z opakující se části, což je číslice 4.

**Poznámka.** V řešení je podstatný pouze zbytek po dělení 1000 číslem 6, a ten lze určit bez úplného dělení následovně: Největší číslo dělitelné 6 (tzn. dělitelné 2 a 3), které je menší než 1000, je 996. Zbytek po dělení  $1000 : 6$  je  $1000 - 996 = 4$ .

## Z7–I–2

Kuba se domluvil s bačou, že se mu bude starat o ovce. Bača Kubovi slíbil, že po roce služby dostane dvacet zlatých a k tomu jednu ovci. Jenže Kuba dal výpověď, právě když uplynul sedmý měsíc služby. I tak ho Bača spravedlivě odměnil a zaplatil mu pět zlatých a jednu ovci.

Na kolik zlatých si bača cenil jednu ovci? (L. Hozová)

**Nápověda.** Na kolik zlatých si bača cenil Kubovu měsíční práci?

**Možné řešení.** Kubovi zbývalo do konce roku 5 měsíců a dostal zapláceno o 15 zlatých méně, než by dostal po celém roce služby. To znamená, že pokud by byl vyplácen pouze v hotovosti, dostával by za každý měsíc 3 zlaté ( $15 : 5 = 3$ ).

Za 7 měsíců měl takto Kuba dostat 21 zlatých ( $7 \cdot 3 = 21$ ). Dostal ale 5 zlatých a jednu ovci, ovce má tedy cenu 16 zlatých ( $21 - 5 = 16$ ).

**Jiná nápověda.** Jak by mohla vypadat spravedlivá odměna za sedmiletou službu?

**Jiné řešení.** Máme dva způsoby vyjádření téže odměny:

- 20 zlatých a 1 ovce za 12 měsíců,
- 5 zlatých a 1 ovce za 7 měsíců.

Pokud tato vyjádření převedeme vzhledem ke stejnému časovému úseku, budeme umět určit cenu ovce. Odměnu za sedm let (tj.  $7 \cdot 12$  měsíců) služby můžeme vyjádřit dvojím způsobem:

- 140 zlatých a 7 ovcí (tj. sedmkrát první možnost),
- 60 zlatých a 12 ovcí (tj. dvanáctkrát druhá možnost).

V prvním případě je odměna o 80 zlatých větší a o 5 ovcí menší než ve druhém. Tedy 5 ovcí stojí 80 zlatých a jedna ovce stojí 16 zlatých ( $80 : 5 = 16$ ).

**Poznámka.** Pokud zlaté označíme  $z$  a cenu ovce  $o$ , potom informace za zadání můžeme zapsat takto:

$$5z + o = \frac{7}{12}(20z + o).$$

Odtud lze různými způsoby vyjádřit  $o$  pomocí  $z$ . Úvahy z předchozího řešení lze shrnout následovně:

$$12(5z + o) = 7(20z + o),$$

$$60z + 12o = 140z + 7o,$$

$$5o = 80z,$$

$$o = 16z.$$

Ze zadání není předem zřejmé, že cena ovce ve zlatých je celočíselná. S tímto dodatečným předpokladem je možné výsledek nalézt postupným zkoušením možností.

### Z7-I-3

Pro skupinu dětí platí, že v každé trojici dětí ze skupiny je chlapec jménem Adam a v každé čtveřici je dívka jménem Beata.

Kolik nejvýše dětí může být v takové skupině a jaká jsou v tom případě jejich jména? (J. Zhouf)

**Nápověda.** Pokud nevíte, jak začít, uvažte konkrétní skupinu dětí a ověřte, zda platí uvedené vlastnosti.

**Možné řešení.** Jelikož v každé trojici je nějaký chlapec, jsou v celé skupině nejvýše dvě dívky. Jelikož v každé čtveřici je nějaká dívka, jsou v celé skupině nejvýše tři chlapci. Tedy skupina sestávající ze dvou dívek a tří chlapců je největší možná vyhovující skupina.

Jelikož v každé trojici je nějaký Adam, musí se tak jmenovat všichni tři chlapci. Jelikož v každé trojici je nějaká Beata, musí se tak jmenovat obě dívky.

### Z7-I-4

Mezi přístavy Mumraj a Zmatek pendlují po stejné trase dvě lodě. V přístavech tráví zanedbatelný čas, hned se otáčí a pokračují v plavbě. Ráno ve stejný okamžik vyplouvá modrá loď z přístavu Mumraj a zelená loď z přístavu Zmatek. Poprvé se lodě míjejí 20 km od přístavu Mumraj a po nějakém čase se potkají přímo v tomto přístavu. To už modrá loď stihla uplout trasu mezi přístavy čtyřikrát, zatímco zelená loď pouze třikrát.

Jak dlouhá je trasa mezi přístavy Mumraj a Zmatek? (F. Steinhäuser)

**Nápověda.** Která loď je rychlejší? A kolikrát?

**Možné řešení.** Lodě vyplouvají ze svých přístavů současně, místo prvního míjení odpovídá jejich rychlostem: poměr ujetých vzdáleností od přístavů je roven poměru rychlostí příslušných lodí.

Poměr rychlostí modré a zelené lodi je 4 : 3. Ve stejném poměru jsou vzdálenosti od přístavů Mumraj a Zmatek (v tomto pořadí). Vzdálenost od Mumraje je 20 km, tedy vzdálenost od Zmatku je 15 km ( $20 : 15 = 4 : 3$ ).

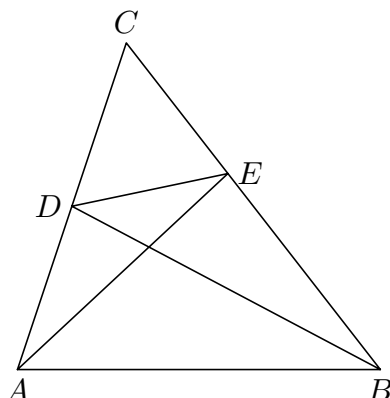
Trasa mezi přístavy je dlouhá 35 km ( $20 + 15 = 35$ ).



**Z7–I–6**

V trojúhelníku  $ABC$  leží na straně  $AC$  bod  $D$  a na straně  $BC$  bod  $E$ . Velikosti úhlů  $ABD$ ,  $BAE$ ,  $CAE$  a  $CBD$  jsou po řadě  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $20^\circ$  a  $30^\circ$ .

Určete velikost úhlu  $AED$ .



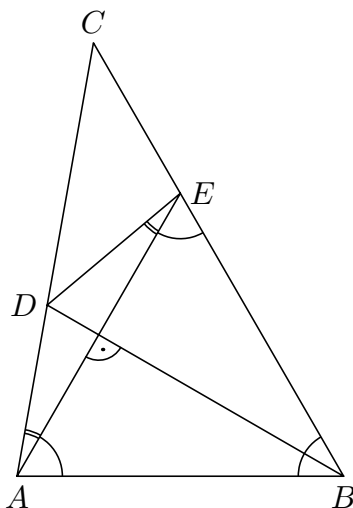
Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní.

(A. Bohiniková)

**Nápověda.** Hledejte shodné úhly.

**Možné řešení.** Velikost úhlu  $ABC$  je rovna součtu velikostí úhlů  $ABD$  a  $CBD$ , tj.  $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ . V trojúhelníku  $ABE$  mají dva vnitřní úhly velikost  $60^\circ$ , tedy zbylý úhel má také velikost  $60^\circ$  a trojúhelník je rovnostranný.

Přímka  $BD$  je osou vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníku  $ABE$ , tedy je také jeho výškou. Zejména body  $A$  a  $E$  jsou souměrné podle přímky  $BD$ . Úsečky  $AD$  a  $ED$ , resp. úhly  $EAD$  a  $AED$  jsou proto shodné. Velikost úhlu  $AED$  je rovna  $20^\circ$ .



**Poznámka.** Podle údajů ze zadání lze sestavit trojúhelník  $ABC$  včetně bodů  $D$  a  $E$ . To je vhodný začátek pro odhalení potřebných souvislostí. Řešení založené na měření z obrázku však nelze považovat za vyhovující.

Při této příležitosti připomínáme, že úhel  $20^\circ$  (stejně jako mnoho jiných úhlů) nelze sestavit pouze pomocí pravítka a kružítka.

## I. kolo kategorie Z8

## Z8–I–1

Myslím si pětimístné číslo, které není dělitelné třemi ani čtyřmi. Pokud každou číslici zvětším o jedna, získám pětimístné číslo, které je dělitelné třemi. Pokud každou číslici o jedna zmenším, získám pětimístné číslo dělitelné čtyřmi. Pokud prohodím libovolné dvě číslice, číslo se zmenší.

Jaké číslo si můžu myslet? Najděte všechny možnosti. (M. Mach)

**Nápověda.** Umíte předem vyloučit některé číslice na jednotlivých místech?

**Možné řešení.** Vlastnost s prohazováním číslic znamená, že každá číslice myšleného čísla je větší než následující, resp. menší než předchozí. Vlastnost se zvětšením a zmenšením číslic znamená, že největší číslice je menší než 9 a nejmenší číslice je větší než 0. Celkem tedy platí, že

1. číslice je menší než 9 a větší než 4,
2. číslice je menší než 8 a větší než 3,
3. číslice je menší než 7 a větší než 2,
4. číslice je menší než 6 a větší než 1,
5. číslice je menší než 5 a větší než 0.

Vlastnost s dělitelností čtyřmi znamená, že poslední dvojčíslí zmenšeného čísla je dělitelné čtyřmi. To spolu s předchozími podmínkami znamená, že poslední dvojčíslí myšleného čísla může být některé z následujících:

51, 43, 31.

Vlastnost s dělitelností třemi znamená, že součet číslic zvětšeného čísla je dělitelný třemi, tedy součet číslic myšleného čísla dává po dělení třemi zbytek jedna. Všechna možná myslitelná čísla jsou

87643, 76543, 87631, 86431, 76531, 65431.

## Z8–I–2

Na zahradě stály tři bedny s jablky. Celkem bylo jablek více než 150, avšak méně než 190. Maruška přemístila z první bedny do dvou dalších beden jablka tak, že se jejich počet v každé z těchto dvou beden oproti předchozímu stavu zdvojnásobil. Obdobným způsobem Marta přemístila jablka z druhé bedny do první a třetí. Nakonec Šárka podle stejných pravidel přemístila jablka z třetí bedny do první a druhé. Když přišel na zahradu Vojta, podivil se, že v každé bedně byl stejný počet jablek.

Kolik jablek bylo v jednotlivých bednách původně? (L. Hozová)

**Nápověda.** V které bedně bylo po druhém přemístění nejvíc jablek?

**Možné řešení.** Po třetím přemístění byl v každé bedně stejný počet jablek, a ten si označíme  $x$ . Postupně odzadu doplníme počty jablek v jednotlivých bednách:

	1. bedna	2. bedna	3. bedna
po 3. přemístění	$x$	$x$	$x$
po 2. přemístění	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$	$2x$
po 1. přemístění	$\frac{1}{4}x$	$\frac{7}{4}x$	$x$
původně	$\frac{13}{8}x$	$\frac{7}{8}x$	$\frac{1}{2}x$

Počty jablek po každém přemístění v každé bedně byly celočíselné. Tedy  $x$  musí být násobkem osmi a  $3x$  (součet jablek ve všech bednách) musí být násobkem 24.

Mezi čísla 151 až 189 je jediný násobek čísla 24, a to 168. Tedy  $x = 168 : 3 = 56$  a v bednách původně byly následující počty jablek:

$$\frac{13}{8} \cdot 56 = 91, \quad \frac{7}{8} \cdot 56 = 49, \quad \frac{1}{2} \cdot 56 = 28.$$

**Poznámka.** Pokud bychom uvažovali odpředu, potom počty jablek v bednách lze postupně vyjádřit takto:

	1. bedna	2. bedna	3. bedna
původně	$a$	$b$	$c$
po 1. přemístění	$a - b - c$	$2b$	$2c$
po 2. přemístění	$2a - 2b - 2c$	$-a + 3b - c$	$4c$
po 3. přemístění	$4a - 4b - 4c$	$-2a + 6b - 2c$	$-a - b + 7c$

Rovnost počtů jablek po třetím přemístění vede k soustavě rovnic, která je pro řešitele v této kategorii problematická. Nicméně s předpoklady celočíselnosti  $a, b, c$  a omezenosti součtu  $150 < a + b + c < 190$  má tato soustava jediné řešení uvedené výše.

### Z8–I–3

V trojúhelníku  $ABC$  je bod  $S$  středem vepsané kružnice. Obsah čtyřúhelníku  $ABCS$  je roven čtyřem pětinaám obsahu trojúhelníku  $ABC$ . Délky stran trojúhelníku  $ABC$  vyjádřené v centimetrech jsou všechny celočíselné a obvod trojúhelníku  $ABC$  je 15 cm.

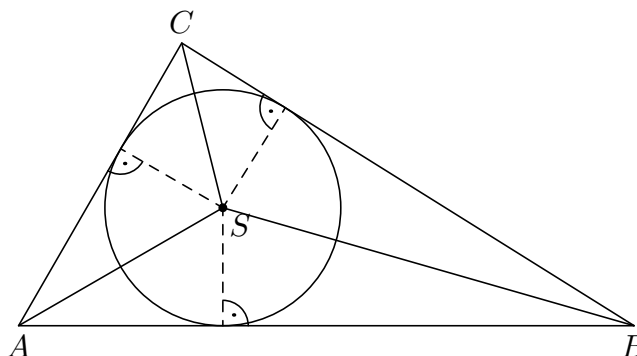
Určete délky stran trojúhelníku  $ABC$ . Najděte všechny možnosti.

(E. Semerádová)

**Nápověda.** Umíte určit obsah trojúhelníku pomocí jeho obvodu a poloměru kružnice vepsané?

**Možné řešení.** Trojúhelník  $ABC$  lze rozložit na trojúhelníky  $ABS$ ,  $BCS$  a  $ACS$ . Výška každého z těchto trojúhelníků z vrcholu  $S$  je shodná s poloměrem vepsané kružnice. Poměry jejich obsahů jsou proto stejné jako poměry délek stran proti vrcholu  $S$ .

Obdobně lze porovnávat tyto dílčí trojúhelníky s celým trojúhelníkem  $ABC$  (jehož obsah je roven součinu obvodu a poloměru vepsané kružnice).



Protože obsah čtyřúhelníku  $ABCS$  je roven čtyřem pětinaám obsahu trojúhelníku  $ABC$ , zbývá na trojúhelník  $ACS$  jedna pětina obsahu trojúhelníku  $ABC$ . Tedy délka strany  $AC$  je rovna pětině obvodu trojúhelníku  $ABC$ , což v našem případě je  $15 : 5 = 3$  (cm). Součet délek zbylých dvou stran je proto 12 cm; v úvahu připadají následující dvojice délek stran (uvedeno v cm, bez ohledu na pořadí):

1, 11; 2, 10; 3, 9; 4, 8; 5, 7; 6, 6.

Aby uvažované úsečky tvořily strany trojúhelníku, musí být splněny trojúhelníkové nerovnosti. Těmto požadavkům vyhovují pouze následující trojice — možné délky stran trojúhelníku  $ABC$  v cm:

3, 5, 7; 3, 6, 6.

#### Z8–I–4

Jitka byla na brigádě s neměnnou denní mzdou. Za tři dny si vydělala tolik peněz, že si koupila stolní hru a ještě jí 490 Kč zbylo. Kdyby strávila na brigádě pět dní, mohla by si koupit dvě takové stolní hry a ještě by jí zbylo 540 Kč.

Kolik korun stála stolní hra?

(K. Pazourek)

**Nápověda.** Píďte se nejprve po Jitčině denní mzdě.

**Možné řešení.** Za třídenní výplatu si Jitka koupila jednu hru a zbylo jí 490 Kč, tedy za šestidenní výplatu by si mohla koupit dvě hry a zbylo by jí 980 Kč. Přitom za pět dní by vydělala také na dvě hry, ale zbylo by jí jen 540 Kč. Jitčina denní mzda proto byla 440 Kč ( $980 - 540 = 440$ ).

Z prvního údaje dopočítáme cenu jedné hry:  $3 \cdot 440 - 490 = 830$  Kč.

**Poznámka.** Pokud denní výplatu označíme  $v$  a cenu hry  $h$ , potom lze předchozí úvahy shrnout následovně:

- $3v = h + 490$ , tedy  $6v = 2h + 980$ ,
- $5v = 2h + 540$ , tedy  $v = 980 - 540 = 440$ ,
- $h = 3v - 490 = 3 \cdot 440 - 490 = 830$ .

## Z8–I–5

Pan Stříbrný uspořádal výstavu. Vystavoval 120 prstenů, které ležely na stolech podél stěn sálu a tvořily tak jednu velkou kružnici. Prohlídka začínala u vchodových dveří v označeném směru. Odtud každý třetí prsten v řadě byl zlatý, každý čtvrtý prsten byl starožitný a každý desátý prsten měl diamant. Prsten, který neměl žádnou z těchto tří vlastností, byl padělek.

Kolik bylo na výstavě zlatých prstenů, které byly starožitné a zároveň měly diamant? Kolik vystavil pan Stříbrný padělků? (L. Hozová)

**Nápověda.** Podle jakých pravidel byly rozmístěny prsteny s různými kombinacemi třech zmiňovaných vlastností?

**Možné řešení.** Každý 3. prsten byl zlatý, každý 4. byl starožitný a každý 10. měl diamant. Tedy

- zlatých prstenů bylo  $120 : 3 = 40$ ,
- starožitných prstenů bylo  $120 : 4 = 30$ ,
- prstenů s diamantem bylo  $120 : 10 = 12$ .

Při počítání prstenů s více vlastnostmi nejprve určíme, s jakou pravidelností se na výstavě opakovaly: každý 12. prsten byl zlatý a starožitný, každý 30. byl zlatý s diamantem a každý 20. byl starožitný s diamantem (zde např. 20 je nejmenším společným násobkem čísel 4 a 10). Tedy

- zlatých starožitných prstenů bylo  $120 : 12 = 10$ ,
- zlatých prstenů s diamantem bylo  $120 : 30 = 4$ ,
- starožitných prstenů s diamantem bylo  $120 : 20 = 6$ .

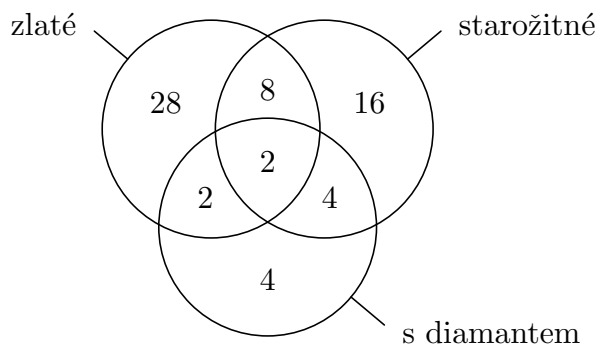
Dále každý 60. prsten měl všechny tři vlastnosti (60 je nejmenším společným násobkem čísel 3, 4 a 10), tedy

- zlaté starožitné prsteny s diamantem byly  $120 : 60 = 2$ .

Při počítání prstenů s některou z uvedených vlastností musíme být obezřetní: 10 prstenů bylo zlatých a starožitných, 2 z nich měly navíc diamant, tedy zlatých starožitných prstenů bez diamantu bylo  $10 - 2 = 8$ . Obdobně zlatých nestarožitných prstenů s diamantem bylo  $4 - 2 = 2$  a nezlatých starožitných prstenů s diamantem bylo  $6 - 2 = 4$ .

Zlatých prstenů s nějakou dodatečnou vlastností bylo  $2 + 8 + 2 = 12$ , přitom zlatých prstenů celkem bylo 40, tedy zlatých nestarožitných prstenů bez diamantu bylo  $40 - 12 = 28$ . Obdobně nezlatých starožitných prstenů bez diamantu bylo  $30 - (2 + 8 + 4) = 16$  a nezlatých nestarožitných prstenů s diamantem bylo  $12 - (2 + 2 + 4) = 4$ .

Předchozí počty a vztahy můžeme znázornit pomocí Vennova diagramu takto:



Prstenů s některou ze tří sledovaných vlastností (tedy prstenů, které nebyly padělků) bylo  $2 + 8 + 4 + 2 + 28 + 16 + 4 = 64$ . Padělků proto bylo  $120 - 64 = 56$ .

**Poznámka.** Pokud základní tři množiny prstenů označíme  $Z$ ,  $S$  a  $D$ , potom úvodní část předchozího řešení lze shrnout následovně:

$$\begin{aligned} |Z| &= 40, & |S| &= 30, & |D| &= 12, \\ |Z \cap S| &= 10, & |Z \cap D| &= 4, & |S \cap D| &= 6, \\ |Z \cap S \cap D| &= 2. \end{aligned}$$

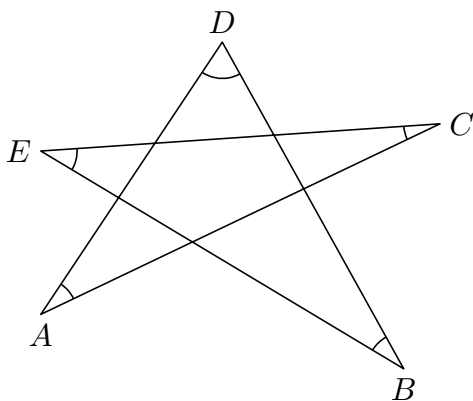
V další části jsme zjišťovali počet prvků sjednocení  $Z \cup S \cup D$  tak, že jsme postupně vyjadřovali počty prvků navzájem disjunktních\* podmnožin  $(Z \cap S) \setminus (Z \cap S \cap D)$ ,  $(Z \cap D) \setminus (Z \cap S \cap D)$  atd., které jsme pak sečetli. Stručněji lze k témuž výsledku dospět následujícím výpočtem:

$$\begin{aligned} |Z \cup S \cup D| &= |Z| + |S| + |D| - |Z \cap S| - |Z \cap D| - |S \cap D| + |Z \cap S \cap D| = \\ &= 40 + 30 + 12 - 10 - 4 - 6 + 2 = 64. \end{aligned}$$

Tomuto vztahu se přezdívá *princip inkluze a exkluze*. K jeho obecnému zdůvodnění (příp. dalšímu zobecnění) stačí ověřit, že každou z disjunktních částí Vennova diagramu započítáváme právě jednou.

### Z8–I–6

Body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  a  $E$  jsou vrcholy nepravidelné pěticípé hvězdy, viz obrázek. Určete součet vyznačených úhlů.



Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní.

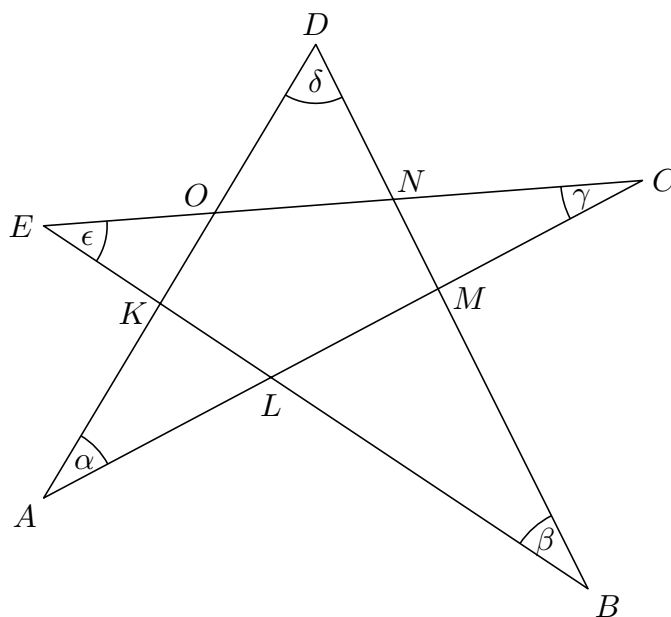
(L. Hozová)

**Nápověda.** Jaký je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku?

**Možné řešení.** Pomocí vyznačených úhlů lze vyjádřit všemožné další úhly v daném mnohoúhelníku. Takto začneme a pokusíme se zjistit něco o hledaném součtu. Vyznačené úhly a zbylé vrcholy mnohoúhelníku označíme následovně:

---

\* Disjunktní množiny jsou množiny s prázdným průnikem, tedy množiny bez společného prvku.



Úhel  $LKO$  je vnitřním úhlem trojúhelníku  $BKD$ , tedy lze vyjádřit jako  $180^\circ - \beta - \delta$ . Úhel  $LKA$  je doplňkovým úhlem k úhlu  $LKO$ , resp. vnějším úhlem trojúhelníku  $BKD$ , tedy je roven  $\beta + \delta$ . Obdobně úhel  $KLA$  je roven  $\gamma + \varepsilon$  atd.

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku  $AKL$  je právě hledaným součtem vyznačených úhlů:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ.$$

**Poznámky.** V předchozím řešení jsme se soustředili na vyjádření úhlů v cípu hvězdy s vrcholem  $A$ . Tentýž výsledek dostáváme v kterémkoli jiném cípu.

Přestože vyznačené úhly mohou být velmi různorodé, jejich součet je vždy stejný. To je důsledkem podobně nesamozřejmého tvrzení o součtu úhlů v trojúhelníku. Toto tvrzení bude jistě v pozadí jakéhokoli jiného řešení úlohy. Např. je možné využít součtu vnitřních úhlů obecného mnohoúhelníku:  $n$ -úhelník lze rozdělit (různými způsoby) na  $n - 2$  trojúhelníky, tedy součet jeho vnitřních úhlů je  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

**Jiné řešení.** Součet vnitřních úhlů pětiúhelníku  $KLMNO$  je roven  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Obdobně jako v řešení uvedeném výše lze vnitřní úhly u vrcholů  $K, L, M, N, O$  vyjádřit po řadě jako

$$180^\circ - \beta - \delta, \quad 180^\circ - \gamma - \varepsilon, \quad 180^\circ - \delta - \alpha, \quad 180^\circ - \varepsilon - \beta, \quad 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

Celkem tak dostáváme

$$5 \cdot 180^\circ - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 540^\circ,$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 360^\circ,$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ.$$

## I. kolo kategorie Z9

## Z9–I–1

Slavěna si napsala barevnými fixy čtyři různá přirozená čísla: červené, modré, zelené a žluté. Když červené číslo vydělí modrým, dostane jako neúplný podíl zelené číslo a žluté představuje zbytek po tomto dělení. Když vydělí modré číslo zeleným, vyjde jí dělení beze zbytku a podílem je číslo žluté. Slavěna prozradila, že dvě z jejích čtyř čísel jsou 97 a 101.

Určete ostatní Slavěnina čísla a přiřaďte jednotlivým číslům barvy. Najděte všechny možnosti. (M. Petrová)

**Nápověda.** Které z uvedených barev nemohou mít čísla 97 a 101?

**Možné řešení.** Čísla si označíme počátečními písmeny podle jejich barvy, tedy  $\check{c}$ ,  $m$ ,  $z$ ,  $\check{z}$ . Informace o dělení pak můžeme zapsat takto:

$$\check{c} = m \cdot z + \check{z}, \quad m = z \cdot \check{z}.$$

Protože čísla mají být navzájem různá, z druhé rovnosti plyne, že  $z$  ani  $\check{z}$  není 1. To znamená, že  $m$  je číslo složené. Dosazením druhé rovnosti do první dostáváme

$$\check{c} = z^2 \cdot \check{z} + \check{z} = (z^2 + 1) \cdot \check{z}.$$

Z předchozího víme, že jak  $z^2 + 1$ , tak  $\check{z}$  nejsou 1, tedy také  $\check{c}$  je číslo složené. Vzhledem k tomu, že obě čísla 97 a 101 jsou prvočísla, nemůže být žádné z nich ani modré, ani červené.

Jedno z čísel 97 a 101 je proto žluté a jedno zelené. Zbylá čísla dopočítáme z úvodních vztahů:

$\check{z}$	$z$	$m$	$\check{c}$
97	101	9 797	989 594
101	97	9 797	950 410

**Poznámka.** Úlohu lze řešit také postupným zkoušením možností: dvojice známých čísel se dosadí do úvodních rovností a ověří se existence zbylé dvojice čísel. Např. dosazení  $\check{c} = 101$  a  $m = 97$  určuje z první rovnosti  $z = 1$  a  $\check{z} = 4$ , což však nevyhovuje rovnosti druhé. Tímto způsobem by se muselo probrat 12 možností.

Jakýkoli dodatečný postřeh může snížit počet možností k ověřování. Např. (vedle podmínek uvedených v předchozím řešení) platí, že  $\check{c}$  je větší než kterékoli ze zbylých čísel a  $m$  je větší než  $z$  a  $\check{z}$ . Zejména nemůže být  $\check{c} = 97$  a touto možností se není třeba zaobírat.

**Z9–I–2**

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel  $x$  a jednomístných přirozených čísel  $y$ , pro která platí

$$\frac{x}{y} + 1 = x, \overline{y}.$$

Zápis na pravé straně rovnosti značí periodické číslo. (K. Pazourek)

**Nápověda.** Existuje nějaká souvislost mezi desetinnými rozvoji čísel  $\frac{x}{y} + 1$  a  $\frac{1}{y}$ ?

**Možné řešení.** Aby  $\frac{x}{y} + 1$  bylo periodické číslo s jednomístnou periodou, musí být také  $\frac{x}{y}$  periodické číslo s jednomístnou periodou. Protože  $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ , musí tatáž podmínka platit také pro číslo  $\frac{1}{y}$ . Mezi přirozenými čísly 1 až 9 je tato podmínka splněna pouze ve třech případech, které postupně probereme:

- Pro  $y = 3$  je  $\frac{1}{y} = 0, \overline{3}$ . Tedy diskutovaná rovnost je tvaru

$$\frac{x}{3} + 1 = x + \frac{1}{3},$$

což po úpravě dává  $x = 1$ .

- Pro  $y = 6$  je  $\frac{1}{y} = 0, \overline{16}$ . Tedy  $0, \overline{6} = 10 \cdot \frac{1}{6} - 1 = \frac{2}{3}$  a diskutovaná rovnost je tvaru

$$\frac{x}{6} + 1 = x + \frac{2}{3},$$

což úpravě dává  $x = \frac{2}{5}$ . To ovšem není celé číslo.

- Pro  $y = 9$  je  $\frac{1}{y} = 0, \overline{1}$ . Tedy  $0, \overline{9} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$  a diskutovaná rovnost je tvaru

$$\frac{x}{9} + 1 = x + 1,$$

což po úpravě dává  $x = 0$ .

Úloha má dvě řešení:  $x = 1, y = 3$  a  $x = 0, y = 9$ .

**Poznámky.** Protože  $\frac{1}{9} = 0, \overline{1}$ , je  $\frac{y}{9} = 0, \overline{y}$  a diskutovanou rovnost lze vyjádřit jako

$$\frac{x}{y} + 1 = x + \frac{y}{9}.$$

Pro každé jednomístné přirozené číslo  $y$  stačí dořešit příslušnou lineární rovnici a ověřit nezápornost a celočíselnost  $x$ . Takto dostaneme dvě řešení uvedená výše.

Předchozí rovnost je možné dále upravovat, např. takto:

$$\begin{aligned} 9x + 9y &= 9xy + y^2 \\ 9(x + y - xy) &= y^2. \end{aligned}$$

Pro libovolná celá čísla  $x$  a  $y$  je výraz na pravé straně dělitelný 9. Tedy také číslo  $y^2$  musí být dělitelné 9, pročež číslo  $y$  musí být dělitelné 3. Mezi čísly 1 až 9 stačí ověřovat pouze  $y = 3, 6$  a  $9$ . Takto jsme dospěli k témuž omezení možností jako v postupu uvedeném výše.

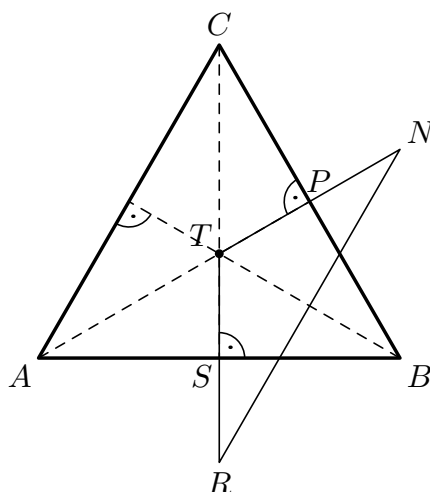
**Z9–I–3**

V rovnostranném trojúhelníku  $ABC$  je bod  $T$  jeho těžištěm, bod  $R$  je obrazem bodu  $T$  v osové souměrnosti podle přímky  $AB$  a bod  $N$  je obrazem bodu  $T$  v osové souměrnosti podle přímky  $BC$ .

Určete poměr obsahů trojúhelníků  $ABC$  a  $TRN$ . (E. Semerádová)

**Nápověda.** Co víte o těžišti rovnostranného trojúhelníku?

**Možné řešení.** V rovnostranném trojúhelníku je těžiště průsečíkem výšek. Obrazy těžiště v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku proto leží na příslušných (prodloužených) těžnicích čili výškách. Zejména trojice bodů  $C, T, R$ , resp.  $A, T, N$  leží na přímkách. Průsečíky těchto přímek se stranami trojúhelníku označíme  $S$ , resp.  $P$ .



Těžiště dělí těžnici v poměru  $2 : 1$ , tedy

$$|CT| = 2|TS|, \quad \text{resp.} \quad |AT| = 2|TP|.$$

V osové souměrnosti jsou vzdálenosti vzoru a obrazu od osy stejné, tedy

$$|TR| = 2|TS|, \quad \text{resp.} \quad |TN| = 2|TP|.$$

Celkem odtud vyvozujeme, že dvojice úseček  $CT$  a  $TR$ , resp.  $AT$  a  $TN$  jsou shodné. Navíc (vrcholové) úhly  $ATC$  a  $NTR$  jsou shodné, tudíž trojúhelníky  $TCA$  a  $TRN$  jsou shodné (podle věty *sus*), zejména mají stejný obsah.

Poměr obsahů trojúhelníků  $ABC$  a  $TRN$  je stejný jako poměr obsahů trojúhelníků  $ABC$  a  $ACT$ . Trojúhelníky  $ABC$  a  $ACT$  mají společnou stranu  $AC$  a odpovídající výšky v poměru  $3 : 1$ ; v tomtéž poměru jsou také jejich obsahy. Poměr obsahů trojúhelníků  $ABC$  a  $TRN$  je  $3 : 1$ .

**Poznámka.** Předchozí řešení bylo založeno na znalosti polohy těžiště na těžnici. I bez tohoto poznatku lze úlohu dořešit s použitím dalších vlastností plynoucích ze zadání, např.:

- Trojúhelník  $ABC$  je tvořen třemi navzájem shodnými trojúhelníky  $ABT$ ,  $BCT$  a  $ACT$ , příp. šesti trojúhelníky, z nichž každý je shodný s trojúhelníkem  $TSB$ .
- Trojúhelníky  $TRB$  a  $TNB$  jsou rovnostranné, navzájem shodné.

- Čtyřúhelník  $TRBN$  je kosočtverec, který je úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, z nichž každý je shodný s trojúhelníkem  $TSB$ .

Odtud poměr obsahů trojúhelníků  $ABC$  a  $TRN$  je  $6 : 2 = 3 : 1$ .

#### Z9–I–4

Na zdi byla napsána dvě stejná pětimístná čísla. Pat před jedno z těchto čísel připsal jedničku, Mat připsal jedničku za to druhé. Tím dostali dvě šestimístná čísla, z nichž jedno bylo třikrát větší než druhé.

Která pětimístná čísla byla původně napsána na zdi? (L. Hozová)

**Nápověda.** Které z nově vzniklých čísel bylo větší?

**Možné řešení.** Obě nová čísla měla stejný počet číslic a větší bylo třikrát větší než druhé. Větší číslo tedy nemohlo začínat jedničkou — bylo to číslo Matovo.

Původně napsaná pětimístná čísla označíme  $x$ . Patova úprava dává číslo  $100\,000 + x$ , Matova úprava dává číslo  $10x + 1$  a platí

$$\begin{aligned} 10x + 1 &= 3(100\,000 + x), \\ 7x &= 299\,999, \\ x &= 42\,857. \end{aligned}$$

Na zdi bylo původně napsáno dvakrát číslo 42 857.

**Poznámky.** Pokud bychom předpokládali, že Patovo nové číslo bylo větší než Matovo, potom bychom dostali

$$\begin{aligned} 100\,000 + x &= 3(10x + 1), \\ 99\,997 &= 29x. \end{aligned}$$

To však nevede k celočíselnému řešení (zbytek po dělení  $99\,997 : 29$  je 5).

Úlohu je možné řešit jako algebrogram. Obě uvedené možnosti odpovídají po řadě následujícím zadáním:

$$\begin{array}{r} 1\ a\ b\ c\ d\ e \\ \times \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline a\ b\ c\ d\ e\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ b\ c\ d\ e\ 1 \\ \times \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline 1\ a\ b\ c\ d\ e \end{array}$$

V prvním případě postupně nepřimo doplňujeme  $e = 7$ ,  $d = 5$ ,  $c = 8$ ,  $b = 2$ ,  $a = 4$ , což odpovídá řešení uvedenému výše. Ve druhém případě postupně přímo doplňujeme  $e = 3$ ,  $d = 9$ ,  $c = 7$ ,  $b = 3$ ,  $a = 1$ , což však vede ke sporu: první číslice ve výsledku vychází 4 a nikoli předepsaná 1.

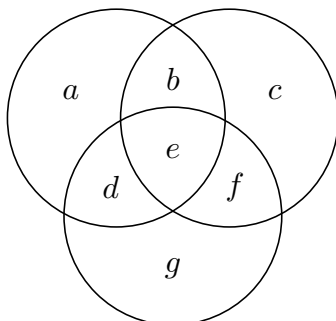
#### Z9–I–5

Na hřišti jsou nakresleny tři stejně velké kruhy, z nichž žádné dva nejsou totožné. Rozmístěte 16 dívek tak, aby v každém kruhu stálo 9 dívek.

Najděte alespoň osm podstatně různých rozmístění, tj. takových rozmístění, při kterých se nerozlišují dívky ani kruhy. (Záměna jednotlivých dívek, příp. celých kruhů s dívkami dává rozmístění, které není podstatně různé od původního.) (L. Hozová)

**Nápověda.** Mohou některé dívky být současně ve všech třech kruzích? Pokud ano, kolik nejvíce?

**Možné řešení.** Dívky v kruzích představují prvky v množinách: hledáme tři množiny po 9 prvcích, jejichž sjednocení má 16 prvků. Vztahy mezi množinami znázorníme následovně (písmena  $a$  až  $g$  označují počty prvků v příslušných podmnožinách):



Stačí se soustředit pouze na  $b, d, e, f$ , neboť zbylé tři neznámé jsou těmito čtyřmi zcela určeny:

$$a = 9 - b - e - d, \quad c = 9 - b - e - f, \quad g = 9 - d - e - f. \quad (1)$$

Pomocí těchto vztahů také dostáváme omezení

$$a + b + c + d + e + f + g = 27 - b - d - f - 2e = 16,$$

tedy

$$b + d + f + 2e = 11. \quad (2)$$

Diskuzi můžeme vést vzhledem ke společnému průniku všech tří množin; z omezení (2) plyne, že  $e$  nemůže být větší než 5. Postupně probereme všechny možné hodnoty  $e$  a pro každou z nich najdeme nezáporná celá čísla  $b, d, f$ , která vyhovují omezení (2) a pro která čísla v (1) jsou též nezáporná. Trojice  $b, d, f$  nás zajímají až na pořadí, takže si je pro pořádek vhodně uspořádáme (záměna pořadí vede k řešení, které není podstatně různé od původního):

Pro  $e = 5$  dostáváme  $b + d + f = 1$ , tedy

$b$	$d$	$f$	$a$	$c$	$g$
1	0	0	3	3	4

Pro  $e = 4$  dostáváme  $b + d + f = 3$ , tedy

$b$	$d$	$f$	$a$	$c$	$g$
3	0	0	2	2	5
2	1	0	2	3	4
1	1	1	3	3	3

Pro  $e = 3$  dostáváme  $b + d + f = 5$ , tedy

$b$	$d$	$f$	$a$	$c$	$g$
5	0	0	1	1	6
4	1	0	1	2	5
3	2	0	1	3	4
3	1	1	2	2	4
2	2	1	2	3	3

Pro  $e = 2$  dostáváme  $b + d + f = 7$ , tedy

$b$	$d$	$f$	$a$	$c$	$g$
7	0	0	0	0	7
6	1	0	0	1	6
5	2	0	0	2	5
5	1	1	1	1	5
4	3	0	0	3	4
4	2	1	1	2	4
3	3	1	1	3	3
3	2	2	2	2	3

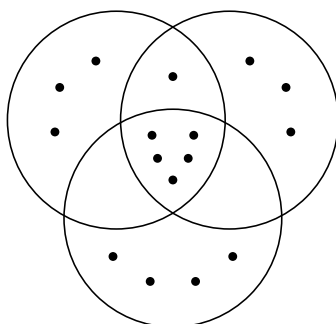
Pro  $e = 1$  dostáváme  $b + d + f = 9$ , tedy

$b$	$d$	$f$	$a$	$c$	$g$
7	1	1	0	0	6
6	2	1	0	1	5
5	3	1	0	2	4
5	2	2	1	1	4
4	4	1	0	3	3
4	3	2	1	2	3
3	3	3	2	2	2

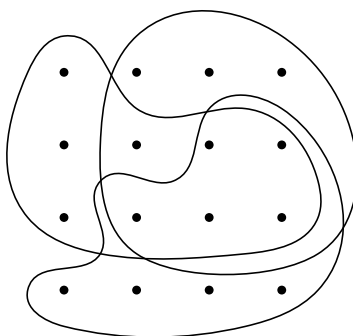
Pro  $e = 0$  dostáváme  $b + d + f = 11$ , tedy

$b$	$d$	$f$	$a$	$c$	$g$
7	2	2	0	0	5
6	3	2	0	1	4
5	4	2	0	2	3
5	3	3	1	1	3
4	4	3	1	2	2

Případné znázornění jednotlivých řešení je nabíledni. Pro příklad uvádíme rozmístění odpovídající jedinému řešení v případě  $e = 5$ :



**Poznámky.** Osm podstatně různých řešení lze také najít prostým (trpělivým) zkoušením. V tomto duchu může být přehlednější v dané šestnáctiprvkové množině vybírat tři devítiprvkové podmnožiny tak, aby žádný prvek nezůstal na ocet. Např. výše znázorněné řešení odpovídá následujícímu výběru:



Obecný vztah mezi počty prvků množin, jejich průniky a sjednocením popisuje tzv. *princip inkluze a exkluze*, viz poznámky za řešením úlohy **Z8–I–5**.

**Z9–I–6**

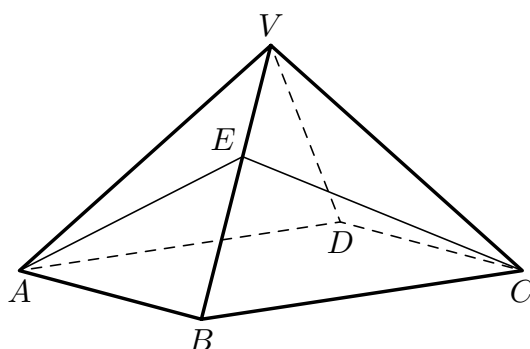
Josef a Marie objevili na dovolené pravidelný jehlan, jehož podstavou byl čtverec o straně 230 m a jehož výška byla rovna poloměru kruhu se stejným obvodem jako podstavný čtverec. Marie označila vrcholy čtverce  $ABCD$ . Josef vyznačil na přímce spojující bod  $B$  s vrcholem jehlanu takový bod  $E$ , že délka lomené čáry  $AEC$  byla nejkratší možná.

Určete délku lomené čáry  $AEC$  zaokrouhlenou na celé centimetry.

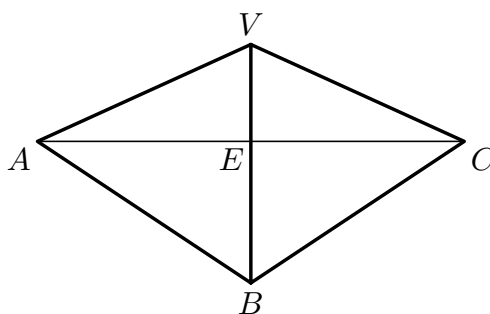
(*M. Krejčová, F. Steinhauser*)

**Nápověda.** V jakém vztahu byly úsečky  $AE$  a  $CE$  vzhledem k přímce spojující bod  $B$  s vrcholem jehlanu?

**Možné řešení.** Kvůli lepší přehlednosti si situaci ze zadání znázorníme:

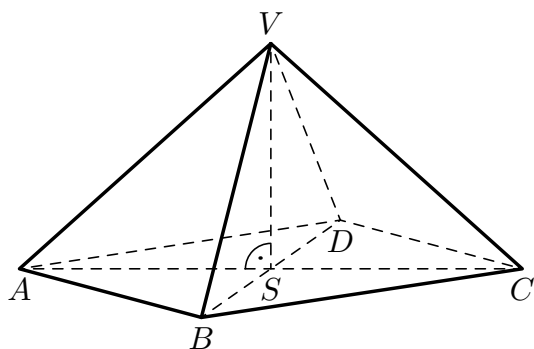


Lomená čára  $AEC$  je nejkratší, když se po rozvinutí pláště jehlanu do roviny jeví jako úsečka:



Úsečky  $AV$  a  $CV$  jsou shodné a stejně tak úsečky  $AB$  a  $CB$ . Tedy po rozvinutí pláště do roviny jsou body  $A$  a  $C$  souměrné podle přímky  $BV$ , zejména úsečka  $AC$  je k této přímce kolmá. Délka nejkratší možné lomené čáry  $AEC$  je rovna dvojnásobku velikosti výšky trojúhelníku  $ABV$  z vrcholu  $A$ , a tak ji také určíme.

Trojúhelník  $ABV$  je rovnoramenný, velikost jeho základny známe, ramena jsou přeponami pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna je polovinou úhlopříčky podstavného čtverce a druhá odvěsna je výškou jehlanu:



Polovina úhlopříčky podstavného čtverce má (podle Pythagorovy věty) velikost

$$|AS| = \frac{\sqrt{2}}{2} |AB| \doteq 162,635 \text{ m.}$$

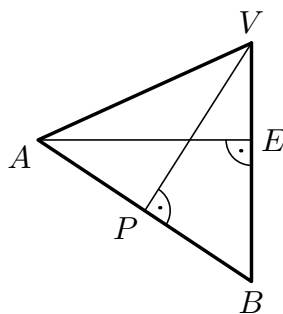
Výška jehlanu má (podle informace ze zadání o obvodech) velikost

$$|SV| = \frac{4}{2\pi} |AB| \doteq 146,423 \text{ m.}$$

Hrany procházející vrcholem jehlanu mají (podle Pythagorovy věty) velikost

$$|AV| = \sqrt{|AS|^2 + |SV|^2} \doteq 218,837 \text{ m.}$$

Nyní známe všechny strany trojúhelníku  $ABV$ . Jeho výšku z vrcholu  $A$  můžeme vyjádřit pomocí výšky z hlavního vrcholu  $V$  a dvojího vyjádření obsahu tohoto trojúhelníku:



Trojúhelník  $ABV$  je souměrný podle výšky jdoucí hlavním vrcholem. Tato výška má (podle Pythagorovy věty) velikost

$$|VP| = \sqrt{|AV|^2 - \frac{1}{4}|AB|^2} \doteq 186,184 \text{ m.}$$

Obsah trojúhelníku  $ABV$  je roven  $\frac{1}{2}|AB| \cdot |VP| = \frac{1}{2}|BV| \cdot |AE| = \frac{1}{2}|AV| \cdot |AE|$ , tedy výška z vrcholu  $A$  má velikost

$$|AE| = \frac{|AB| \cdot |VP|}{|AV|} \doteq 195,681 \text{ m.}$$

Délka nejkratší možné lomené čáry  $AEC$  je

$$|AEC| = 2|AE| \doteq 391,362 \text{ m},$$

tj. přibližně 391 m a 36 cm.

**Poznámky.** Úvodní postřeh s rozvinutým pláštěm jehlanu lze nahradit následující úvahou: Trojúhelníky  $ABV$  a  $BCV$  jsou shodné, tedy i úsečky  $AE$  a  $EC$  jsou shodné a délka lomené čáry  $AEC$  je rovna dvojnásobku délky úsečky  $AE$ . Ta je nejkratší možná, pokud je k přímce  $BE$  kolmá. Stačí tedy určit výšku trojúhelníku  $ABV$  z vrcholu  $A$ .

V uvedeném řešení úlohy může díky průběžnému zaokrouhlování docházet k nežádoucímu hromadění chyby. Proto jsme raději zaokrouhlovali na celé mm. Všechny předchozí veličiny je též možné vyjádřit obecně pomocí  $|AB|$  a dosazovat teprve do konečného výrazu. Takto postupně po úpravách dostáváme:

$$|AV| = \sqrt{\frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2}} \cdot |AB|, \quad |VP| = \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{4\pi^2}} \cdot |AB|, \quad |AE| = \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{2\pi^2 + 16}} \cdot |AB|.$$

Běžně používaná přibližná hodnota  $\pi \doteq \frac{22}{7}$  vede ve výsledku k chybě mezi 2 a 3 cm. Porovnáním celkových rozměrů a proporcí jehlanu to vypadá, že Josef a Marie byli na dovolené v Egyptě u Cheopsovy (resp. Chufuovy či Velké) pyramidy.

K vyjádření výšky trojúhelníku lze také dospět se znalostmi goniometrických funkcí, jejich základního vztahu  $(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1$  a kosinové věty  $(|AV|^2 = |AB|^2 + |BV|^2 - 2|AV| \cdot |BV| \cdot \cos \beta)$ . Tyto znalosti v dané kategorii nemůžeme předpokládat, avšak zvědaví řešitelé se s nimi mohou seznámit, příp. porovnat tento přístup s ostatními.