**68. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie A

**1.** Je dáno přirozené číslo $n$. Tom a Jerry hrají proti sobě hru na plánu sestávajícím z řady 2 018 políček. Na začátku Jerry položí figurku na nějaké políčko. V každém kroku pak Tom řekne celé číslo z intervalu $\langle 1, n\rangle$ a Jerry posune figurku o vyřčený počet políček podle své volby buď doleva, nebo doprava. Tom vyhrává, jakmile Jerry nemá kam táhnout. Najděte nejmenší $n$, pro něž Tom vždy dokáže volit čísla tak, aby po konečném počtu kroků vyhrál. (*Josef Tkadlec*)

**2.** Najděte všechna celá čísla $m$ a $n$, pro která platí $n^{n-1} = 4m^2 + 2m + 3$. (*Tomáš Jurík*)

**3.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$. Na jeho přeponě $BC$ leží body $D$, $E$ takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť $F$ je takový vnitřní bod trojúhelníku $ABC$, že $DEF$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou $DE$. Jaká je velikost úhlu $BFC$? (*Patrik Bak*)

**4.** Najděte maximální hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ pro reálná čísla $a$, $b$, $c$ taková, že všechna tři čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ jsou z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. (*Ján Mazák*)

Krajské kolo kategorie A se koná

**v úterý 15. ledna 2019**

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

# 68. ročník matematické olympiády

*Řešení úloh krajského kola kategorie A*

**1.** Dokážeme, že hledané nejmenší $n$ je 1010. Předpokládejme, že $n \leqq 1009$. Potom má Jerry následující jednoduchou strategii: Položí figurku na jakékoli políčko a pak vždy táhne tak, aby neprohrál. Takový tah by nemohl udělat, jen pokud by nalevo i napravo od zvoleného políčka bylo nejvýše $n-1$ políček. To bychom pak ale měli dohromady nejvýše jen $2(n-1)+1 = 2n-1 \leqq 2017$ políček, což je spor.

Předpokládejme, že $n = 1010$. Očíslujme políčka zleva $1, 2, \ldots, 2018$. Pokud je figurka na políčku 1009 nebo 1010, stačí Tomovi říci 1010 a Jerry nemůže táhnout. Pokud je figurka na políčku $k < 1009$, řekne Tom $1009-k$. Tehdy Jerry nemůže táhnout doprava, neboť by se ocitl na prohrávajícím políčku 1009. Nutně tedy musí táhnout doleva. Pokud tento tah nemůže udělat, prohrává. Pokud může, přiblíží se k levému okraji. Jenže doleva se nemůže posouvat donekonečna, takže pokud Tom opakuje tuto strategii, tak po konečném počtu kroků vyhraje. Analogicky, pokud je figurka na políčku $k > 1010$, řekne Tom číslo $k - 1010$, čímž Jerryho přinutí táhnout doprava, a takto pokračuje, dokud nevyhraje.

**Jiné řešení.** Ukážeme jinou strategii pro Toma pro $n = 1010$. Jak jsme již objasnili v předešlém řešení, pokud je figurka na políčku 1009 nebo 1010, stačí Tomovi říci 1010. Pokud je figurka na políčku $k \leqq 504$, řekne Tom $1009 - k$. Jelikož $k - (1009 - k) \leqq \leqq -1$, nemůže Jerry táhnout doleva, takže nutně musí táhnout doprava na prohrávající políčko 1009. Symetricky, pokud $k \geqq 1515$, řekne Tom $k-1010$ a donutí Jerryho táhnout na prohrávající políčko 1010, jelikož $k + (k - 1010) \geqq 2020$. Dále pokud je figurka na políčku $505 \leqq k \leqq 1008$, Tom řekne 1010, a Jerry musí nutně táhnout doprava, čímž se figurka octne na políčku $1515 \leqq l \leqq 2018$, o kterém již víme, že na něm Jerry prohraje. Konečně pokud je figurka na políčku $1011 \leqq k \leqq 1514$, bude po tahu 1010 na políčku $1 \leqq l \leqq 504$, které je pro Jerryho prohrávající.

*Poznámka.* Tato strategie je zajímavá tím, že dokazuje, že Tomovi na výhru stačí nejvýše tři tahy. Z praktického hlediska je tedy tato strategie pro něj výhodná.

**Jiné řešení.** Pro $n = 1010$ ukážeme ještě jednu jednoduchou Tomovu strategii, při níž dokonce ani nemusí znát polohu figurky. Strategie je následující: Ať je figurka na jakémkoli políčku $k$, použije Tom dvojici tahů 1010 a 1009. Vysvětlíme, proč je taková strategie vyhrávající.

Pokud $k = 1009$ nebo $k = 1010$, je už tah 1010 vítězný. Pokud $k \leqq 1009$, způsobí dvojice tahů 1010 a 1009, že se figurka nutně posune na políčko $k+1$. Analogicky pokud $k \geqq 1011$, tyto tahy způsobí, že se figurka posune na políčko $k-1$. Uvedená dvojice tahů tedy v každém kroku figurku přibližuje k políčku 1009 resp. 1010. Po konečném počtu kroků se tak figurka octne na jednom z těchto políček, na němž následně prohraje.

**Bodovací schéma.**

Za úplné řešení udělte 6 bodů:

- [1 bod] Správný výsledek $n = 1010$ (tento bod udělte v neúplných řešeních jen v případě, že je explicitně uvedeno, že jde o hypotézu o výsledku).
- [2 body] Jerryho strategie pro $n \leqq 1009$ (rozebraná níže).
- [3 body] Tomova strategie pro $n = 1010$ (rozebrané níže).

Jerryho strategie obecně:

1. V případě, že zdůvodnění správnosti není dostatečné, nebo strategie obsahuje opravitelnou chybu, udělte nejvýše 1 bod.

2. Také udělte nejvýše 1 bod, pokud je strategie správně popsána a zdůvodněna pro nějaké $n < 1009$, přičemž se dá jednoduše upravit, aby fungovala pro všechna $n \leqq 1009$.
3. Za strategii, která nefunguje pro všechna $n \leqq 1009$, a ani se nedá jednoduše upravit, aby fungovala, neudělujte žádný bod.
4. Pokud řešitel popíše Jerryho strategii pro $n = 1009$ a ta funguje i pro $n < 1009$, ale explicitně neuvede, že funguje i pro menší $n$, tak bod strhněte, právě když není evidentní, že opravdu funguje i pro $n < 1009$.

Tomova strategie obecně:

1. V případě, že strategie nebo důkaz její správnosti obsahuje malou opravitelnou chybu, strhněte 1 bod.
2. Pokud je strategie nesprávná, tak se při udělování dílčích bodů řiďte podle jednoho z následujících tří schémat.
3. Dílčí body za *různé* Tomovy strategie se nesčítají.

Tomova strategie z prvního řešení:

▷ [1 bod] Strategie pro políčka 1009 a 1010.
▷ [1 bod] Definování strategie pro zbývající políčka.
▷ [1 bod] Zdůvodnění, že taková strategie opravdu funguje v konečném počtu kroků.

Tomova strategie z druhého řešení:

▷ [1 bod] Strategie pro políčko 1010.
▷ [1 bod] Strategie pro „krajní" políčka $k \leqq 504$ a $k \geqq 1515$.
▷ [1 bod] Strategie pro zbývající $505 \leqq k \leqq 1008$ a $1011 \leqq k \leqq 1514$.

Tomova strategie z třetího řešení:

▷ [1 bod] Explicitní definování strategie.
▷ [1 bod] Zdůvodnění, že figurka se po každé dvojici tahů octne na políčku $k + 1$ nebo $k - 1$.
▷ [1 bod] Závěr, že po konečném počtu kroků se figurka dostane na prohrávající políčko 1009 nebo 1010.

**2.** Z dané rovnosti vyplývá, že číslo $n^{n-1}$ je celé. Toto číslo má zřejmě stejnou paritu jako číslo $n$. Číslo $4m^2 + 2m + 3$ je však vždy liché, takže i $n$ musí být liché. Tím pádem je $n - 1$ sudé, takže $n^{n-1}$ je druhá mocnina lichého čísla (ze dvou možných základů dále vezmeme ten kladný).

Položme $n^{n-1} = k^2$, kde $k$ je kladné liché číslo. Dostáváme tak rovnici

$$k^2 = 4m^2 + 2m + 3. \tag{1}$$

Její pravou stranu doplníme standardním způsobem na čtverec, čímž dostáváme

$$k^2 = \left(2m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Abychom měli na obou stranách celá čísla, vynásobíme získanou rovnici číslem 4 a následně ji upravíme do součinového tvaru:

$$4k^2 = (4m + 1)^2 + 11,$$
$$(2k - 4m - 1)(2k + 4m + 1) = 11.$$

Součin celých čísel $a = 2k - 4m - 1$ a $b = 2k + 4m + 1$ je tedy roven 11, přitom jejich součet $a + b = 4k$ je číslo kladné, takže kladná jsou i obě čísla $a$ a $b$. Protože 11 je prvočíslo, musí být $\{a, b\} = \{1, 11\}$, a tedy $4k = 12$ neboli $k = 3$. Z rovnosti $a = 5 - 4m$ pak pro $a = 1$ máme $m = 1$, zatímco pro $a = 11$ celočíselné $m$ neexistuje. A rovnici $n^{n-1} = k^2 = 9$ zřejmě splňuje jediné celé $n = 3$.

Jediná dvojice celých čísel $(m, n)$ vyhovující zadané rovnici je $(1, 3)$.

*Poznámka.* Řešení rovnice $ab = 11$ se samozřejmě dá najít i bez dalších úvah rozebráním čtyř možností $a = \pm 1, \pm 11$. A místo užití rovnosti $a = 5 - 4m$ jsme mohli hodnotu $k = 3$ dosadit do (1) a vyřešit kvadratickou rovnici s kořeny $m_1 = 1$ a $m_2 = -3/2$.

**Jiné řešení.** Poté, co dokážeme, že $4m^2 + 2m + 3$ je druhá mocnina celého čísla, můžeme postupovat i jinak. Pro všechna $m \geqq 2$ totiž platí

$$(2m)^2 < 4m^2 + 2m + 3 < (2m + 1)^2$$

a naopak pro $m \leqq -2$ platí

$$(-2m - 1)^2 < 4m^2 + 2m + 3 < (-2m)^2.$$

Tím pádem zbývá prověřit jen $m \in \{-1, 0, 1\}$. Snadno zjistíme, že k řešení vede pouze $m = 1$, z čehož plyne $n = 3$.

*Poznámka.* Argument se „sevřením“ čísla mezi dva po sobě jdoucí čtverce lze použít i jinak. Pro $m \geqq 0$ platí $(2m)^2 < 4m^2 + 2m + 3$. Jelikož $4m^2 + 2m + 3$ je čtverec, tak to nutně znamená $(2m + 1)^2 \leqq 4m^2 + 2m + 3$, z čehož dostaneme $m \leqq 1$. Pro $m \leqq -1$ lze podobně využít nerovnosti $(-2m - 1)^2 < 4m^2 + 2m + 3$.

**Jiné řešení.** Ukážeme ještě jeden způsob, jak vyřešit rovnici (1), když už víme, že $k$ je kladné liché číslo. Rovnici upravíme na tvar

$$(k - 2m)(k + 2m) = 2m + 3. \tag{2}$$

Pokud $m \geqq 0$, je pravá strana rovnice (2) kladná. Jelikož $k + 2m$ je kladné, je i činitel $k - 2m$ kladný, takže $k - 2m \geqq 1$. Vynásobením tohoto odhadu číslem $k + 2m$ dostaneme $2m + 3 \geqq k + 2m$, takže $3 \geqq k$. Ze dvou možných hodnot $k = 1$ nebo $k = 3$ dojdeme k řešení pouze pro $k = 3$, kdy máme $(m, n) = (1, 3)$.

Pokud $m < 0$, můžeme dokonce předpokládat, že $m \leqq -2$, neboť pro $m = -1$ vychází $k^2 = 3$, což není možné. Položme $m' = -m$, potom $m' \geqq 2$. Upravme (2) na

$$(k + 2m')(2m' - k) = 2m' - 3.$$

Protože čísla $k+2m'$, $2m'-3$ jsou kladná, je kladné i číslo $2m'-k$, platí tedy $2m'-k \geqq 1$. Vynásobením tohoto odhadu číslem $k+2m'$ dostaneme $2m'-3 \geqq k+2m'$, tedy $-3 \geqq k$, což odporuje předpokladu $k > 0$.

*Poznámka.* V případě $m \geqq 0$ jsme mohli odhad $k - 2m \geqq 1$ využít i jinak. Je totiž ekvivalentní s nerovností $k + 2m \geqq 4m + 1$, takže $2m + 3 = (k - 2m)(k + 2m) \geqq 4m + 1$, odkud hned plyne $m \leqq 1$.

**Bodovací schéma.**

Za úplné řešení udělte 6 bodů:

- ▷ [1 bod] Zdůvodnění, že číslo $n$ musí být liché.
- ▷ [1 bod] Zdůvodnění, že číslo $n^{n-1}$ musí být druhá mocnina celého čísla.
- ▷ [4 body] Dokončení řešení (rozebrané níže).

Obecné poznámky:

1. V případě uhodnutí výsledku $(m, n) = (1, 3)$ udělte 1 bod.
2. V případě přezkoumání konečného počtu možností udělte nejvýše 1 bod, a sice za správný výsledek.
3. Dílčí body z *různých* postupů se nesčítají.

Dokončení řešení jako v 1. řešení:

- ▷ [2 body] Úprava rovnice do součinového tvaru.
- ▷ [1 bod] Rozbor všech možností rozkladu $ab = 11$ jako v řešení či jako v poznámce.
- ▷ [1 bod] Nalezení výsledku $(m, n) = (1, 3)$.

Neúplné řešení: V případě menší chyby při úpravě do součinového tvaru strhněte 1 bod. V případě opomenutí nějakého rozkladu také strhněte 1 bod.

Dokončení řešení jako ve 2. řešení:

- ▷ [1 bod] Formulace úvahy o tom, že číslo $4m^2 + 2n + 3$ nemůže ležet mezi dvěma po sobě jdoucími čtverci (nebo její ekvivalentní formulace, viz poznámku).
- ▷ [1 bod] Vyloučení případu $m \geqq 2$.
- ▷ [1 bod] Vyloučení případu $m \leqq -2$.
- ▷ [1 bod] Vyřešení zbývajících případů a nalezení výsledku $(m, n) = (1, 3)$.

Neúplné řešení: V případě chyb při úpravách nerovností strhněte 1 až 2 body, podle počtu a závažnosti chyb.

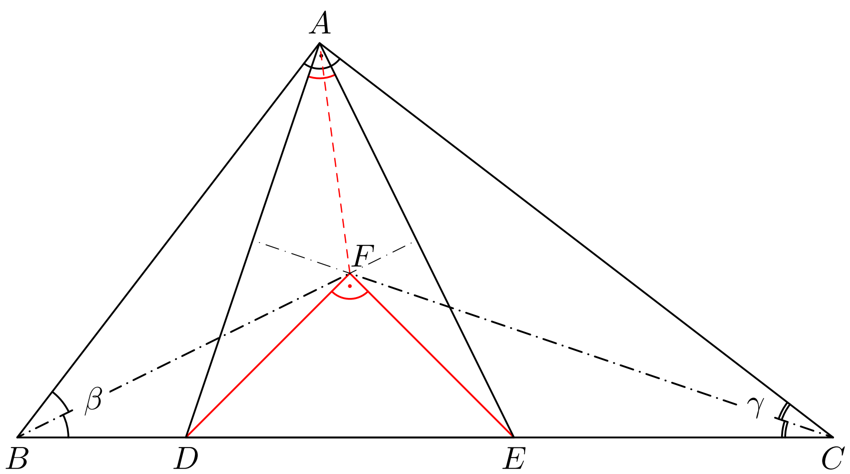
Dokončení řešení jako ve 3. řešení:

- ▷ [1 bod] Napsání rovnice ve tvaru $(k - 2m)(k + 2m) = 2m + 3$.
- ▷ [1 bod] Vyloučení případu $m < 0$.
- ▷ [1 bod] Rozebrání případu $m \geqq 0$ vedoucího ke $k \leqq 3$ nebo $m \leqq 1$ jako v poznámce.
- ▷ [1 bod] Rozebrání zbývajících případů a nalezení výsledku $(m, n) = (1, 3)$.

Neúplné řešení: V případě chyb při úpravách nerovností strhněte 1 až 2 body, podle počtu a závažnosti chyb.

**3.** Nejprve dokážeme, že $F$ je středem kružnice $ADE$. Z $|BA| = |BE|$ plyne, že trojúhelník $BAE$ je rovnoramenný, takže $|\sphericalangle BAE| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, a proto $|\sphericalangle CAE| = \frac{1}{2}\beta$. Podobně z toho, že trojúhelník $CAD$ je rovnoramenný, dostaneme $|\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2}\gamma$. Tím pádem $|\sphericalangle DAE| = 90° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 45°$ (obr. 1, body $D$ a $E$ leží uvnitř strany $BC$ v uvedeném pořadí, neboť $|CD| + |BE| = |CA| + |CB| > |BC|$).

Na kružnici se středem $F$ a poloměrem $|FD| = |FE|$ leží díky pravému středovému úhlu $DFE$ všechny ty body poloroviny $DEF$, ze kterých je úsečka $DE$ vidět pod úhlem 45°, tedy i bod $A$. Bod $F$ je proto středem kružnice opsané trojúhelníku $ADE$, jak jsme úvodem slíbili dokázat.




Obr. 1

Z dokázané rovnosti $|FA| = |FE|$ plyne, že bod $F$ leží na ose úsečky $AE$, která je díky rovnosti $|BA| = |BE|$ zároveň i osou úhlu $ABC$, a podobně přímka $CF$ je osou úhlu $ACB$ (to navíc znamená, že $F$ je středem i kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$). Tím pádem $|\sphericalangle CBF| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle BCF| = \frac{1}{2}\gamma$, takže z trojúhelníku $BFC$ dopočítáme, že jeho třetí úhel je roven $180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 135°$.

*Poznámka.* Po zjištění, že $F$ je středem kružnice opsané trojúhelníku $ADE$, jsme mohli postupovat například i takto: Z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne $|\sphericalangle AFD| = 2|\sphericalangle AEB| = 180° - \beta$. Čtyřúhelník $AFDB$ je tudíž tětivový. Podobně i čtyřúhelník $AFEC$ je tětivový. Pomocí toho vypočítáme

$$|\sphericalangle BFC| = 90^\circ + |\sphericalangle BFD| + |\sphericalangle EFC| =$$
$$= 90^\circ + |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle EAC| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = 135^\circ.$$

Další možnost je vypočítat součet velikostí úhlů $AFB$ a $AFC$, které se pomocí zmíněných tětivových čtyřúhelníků přenesou na úhly $ADB$ a $AEC$, jejichž velikosti jsou po řadě $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$.

**Jiné řešení.** Při obvyklém značení platí $|BE| = c$ a $|CD| = b$, takže snadno vypočítáme $|BD| = a - b$ a $|CE| = a - c$. Proto $|DE| = a - (a-b) - (a-c) = b + c - a$. Označme $M$ střed úsečky $DE$. Jelikož $DEF$ je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, je $|MF| = |MD| = \frac{1}{2}|DE| = \frac{1}{2}(b + c - a)$. Dále tak máme

$$|BM| = |BD| + |DM| = (a - b) + \tfrac{1}{2}(b + c - a) = \tfrac{1}{2}(a + c - b) = s - b,$$

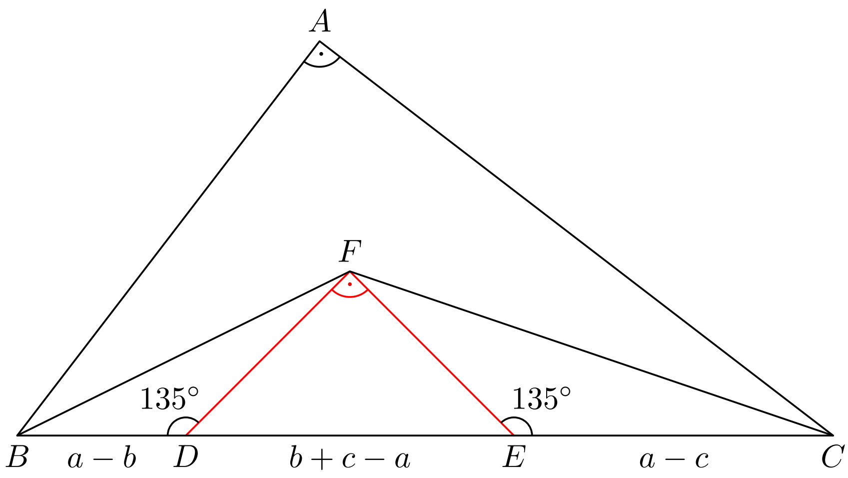
kde $s$ značí polovinu obvodu trojúhelníku $ABC$. Platí tedy (viz doplňkovou úlohu D1 k 5. úloze domácího kola), že $M$ je dotykový bod kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$. Protože trojúhelník $ABC$ je pravoúhlý, zřejmě platí (viz též i následující doplňkovou úlohu), že tato kružnice má poloměr rovný $s - a = \frac{1}{2}(b + c - a) = |MF|$. A poněvadž $MF \perp BC$, dostáváme, že $F$ je středem kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$. Díky tomu $|\sphericalangle CBF| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle BCF| = \frac{1}{2}\gamma$, z čehož už dopočítáme $|\sphericalangle BFC|$ jako v předešlém řešení.

**Jiné řešení.** Využijeme rovnosti $|BD| = a - b$, $|EC| = a - c$ a $|DE| = b + c - a$ (odvozené v předchozím řešení) a ukážeme, že trojúhelníky $BDF$ a $FEC$, které mají při vrcholech $D$ a $F$ shodné úhly o velikosti $135^\circ$ (obr. 2), jsou podobné podle věty *sus*. V takovém případě pak součet vnitřních úhlů obou trojúhelníků při jejich společném vrcholu $F$ činí $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, proto pro hledanou velikost úhlu $BFC$ platí $|\sphericalangle BFC| = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

Stačí tedy ověřit úměru $|BD| : |DF| = |FE| : |EC|$ neboli $|BD||EC| = |DF||FE|$. Přitom $|DF| = |FE| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,|DE| = \frac{1}{2}\sqrt{2}(b + c - a)$, potřebujeme tudíž, aby platila rovnost

$$(a - b)(a - c) = \tfrac{1}{2}(b + c - a)^2,$$

jež se po úpravě redukuje na Pythagorovu rovnost $a^2 = b^2 + c^2$ pro daný pravoúhlý trojúhelník $ABC$.

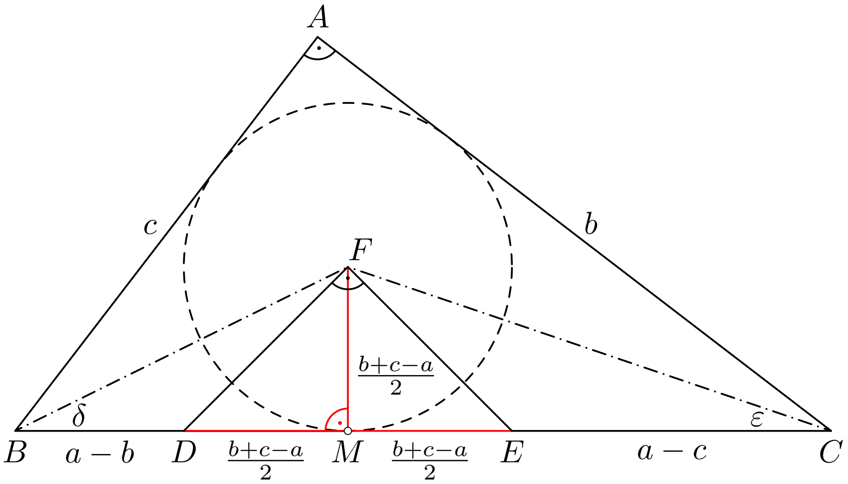



Obr. 2

**Jiné řešení.** Podobně jako ve druhém řešení definujeme bod $M$ a vypočítáme $|BM| = \frac{1}{2}(a+c-b)$ a $|MF| = \frac{1}{2}(b+c-a)$. Dále označme $|\sphericalangle MBF| = \delta$ a $|\sphericalangle MCF| = \varepsilon$ (obr. 3). Z pravoúhlého trojúhelníku $MFB$ máme

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{b+c-a}{a+c-b} \quad \text{a analogicky} \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b+c-a}{a+b-c}.$$

Dále použijeme známý vzorec $\operatorname{tg}(180° - x) = -\operatorname{tg} x$, následně součtový vzorec pro




Obr. 3

tangens a nakonec Pythagorovu větu $a^2 = b^2 + c^2$ na výpočet

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}|\sphericalangle BFC| &= \operatorname{tg}(180° - \delta - \varepsilon) = -\operatorname{tg}(\delta + \varepsilon) = -\frac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\varepsilon}{1 - \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varepsilon} = \\
&= -\frac{\frac{b+c-a}{a+c-b} + \frac{b+c-a}{a+b-c}}{1 - \frac{b+c-a}{a+c-b} \cdot \frac{b+c-a}{a+b-c}} = -\frac{2a(b+c-a)}{(a+c-b)(a+b-c) - (b+c-a)^2} = \\
&= -\frac{2a(b+c) - 2a^2}{2a(b+c) - 2(b^2+c^2)} = -\frac{2a(b+c) - 2(b^2+c^2)}{2a(b+c) - 2(b^2+c^2)} = -1.
\end{aligned}$$

Rovnice $\operatorname{tg}|\sphericalangle BFC| = -1$ má na intervalu $(0°, 180°)$ jediné řešení $|\sphericalangle BFC| = 135°$.

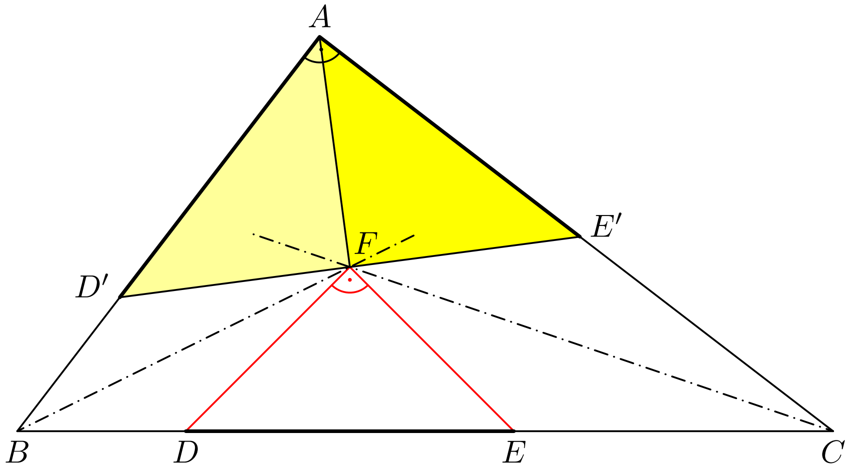
*Poznámka.* I v tomto řešení jsme našli odpověď, aniž jsme postřehli, že $F$ je středem kružnice $ADE$. Nepotřebovali jsme ani to, že $F$ je středem kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$. Pokud bychom však tuto hypotézu měli, uměli bychom ji dokázat i výpočtem. Stačí totiž dokázat, že $\delta = \frac{1}{2}\beta$. Přitom podle vzorce pro tangens polovičního argumentu platí

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \sqrt{\frac{1-c/a}{1+c/a}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}.$$

Ekvivalentními úpravami snadno ověříme, že $\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$. A jelikož funkce tangens je na intervalu $(0°, 90°)$ prostá (je tam rostoucí), je nutně $\delta = \frac{1}{2}\beta$. Analogicky $\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma$, což už znamená, že $F$ je středem kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$.

Soutěžící *Olga Krumlová* z Brna vysvětlila ještě jinak, proč zadaný bod $F$ splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$:

**Jiné řešení.** Ve dvou osových souměrnostech určených osami úhlů $ABC$ a $ACB$ přejde úsečka $DE$ jednak v úsek $AD'$ odvěsny $AB$, jednak v úsek $AE'$ odvěsny $AC$ (obr. 4). Protože rovnoramenný trojúhelník $FDE$ má při základně $DE$ shodné úhly 45°




Obr. 4

rovné polovině pravého úhlu $D'AE'$, obrazy tohoto trojúhelníku v obou zmíněných souměrnostech vytvoří dvě poloviny rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku $AD'E'$ se společnou odvěsnou $AS$, kde $S$ je střed jeho přepony $D'E'$. Bod $S$ je tak zároveň obrazem bodu $F$ v obou souměrnostech, takže musí platit $F = S$, jinak by úsečka $FS$ musela být kolmá k oběma dotyčným osám, což není možné. Bod $F$ coby samodružný bod obou osových souměrností je tudíž průsečíkem obou těchto os, jak jsme chtěli ukázat.

**Jiné řešení.** Jiným způsobem ukážeme, že bod $F$ ze zadání úlohy je zároveň středem $I$ kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$, jejíž poloměr označíme $\varrho$. Protože střed $I$ leží na osách souměrnosti obou rovnoramenných trojúhelníků $BAE$ a $CAD$, platí $|IE| = |IA| = |ID|$, přitom díky pravému úhlu $BAC$ je zřejmě $|IA| = \varrho\sqrt{2}$. Bod $I$ ležící ve vzdálenosti $\varrho$ od přímky $BC$ tak má od dvou jejích různých bodů $D$ a $E$ tutéž vzdálenost $\varrho\sqrt{2}$, a proto jeho kolmý průmět na $BC$ je podle Pythagorovy věty středem základny $DE$ pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku $DEI$. Je tudíž $I = F$, jak jsme slíbili dokázat.

**Bodovací schéma.**

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Obecné poznámky:

1. V případě řešení používajícího analytickou geometrii udělte 6 bodů, pokud je správné, a 0 bodů v případě, kdy je vadné nebo nedokončené.
2. Za hypotézu, že $F$ je středem kružnice vepsané $\triangle ABC$, udělte 1 bod.
3. Za hypotézu o tětivovosti čtyřúhelníků $AFDB$ a $AFEC$ však žádný bod neudělujte.
4. Za hypotézu o výsledku neudělujte žádný bod.
5. Za absenci zmínky o pořadí bodů $D$ a $E$ na přeponě $BC$ body nestrhávejte.
6. Dílčí body z *různých* postupů se nesčítají.

První řešení:

- ▷ [2 body] Zjištění, že $|\sphericalangle DAE| = 45°$, s důkazem.
- ▷ [1 bod] Důkaz, že $F$ je středem kružnice $ADE$.
- ▷ [2 body] Další pozorování umožňující vypočítat $|\sphericalangle BFC|$, jako například zdůvodnění, že $BF$ a $CF$ jsou osy vnitřních úhlů $ABC$ jako v řešení, nebo důkaz, že čtyřúhelníky $AFDB$ a $AFEC$ jsou tětivové, jako v poznámce.
- ▷ [1 bod] Samotný výpočet vedoucí k správnému výsledku $|\sphericalangle BFC| = 135°$.

Neúplné řešení: Za hypotézu, že $F$ je středem kružnice $ADE$, udělte 1 bod. Tento bod lze přičíst k obecně udělovaným bodům za hypotézu, že $F$ je středem kružnice vepsané $\triangle ABC$.

Řešení používající bod $M$ obecně (druhé a třetí řešení):

- ▷ [1 bod] Definování bodu $M$.
- ▷ [1 bod] Vyjádření $|MB|$ (nebo $|MC|$) pouze pomocí stran $\triangle ABC$.
- ▷ [1 bod] Vyjádření $|MF|$ pouze pomocí stran $\triangle ABC$.
- ▷ [3 body] Dokončení řešení (rozebrané níže).

Pokud řešitel dokazuje, že $F$ je středem kružnice vepsané $\triangle ABC$:

- ▷ [2 body] Důkaz, že $F$ je středem kružnice vepsané $\triangle ABC$, buď pomocí odvolání se na známé tvrzení jako v druhém řešení, nebo výpočtem jako v poznámce k třetímu řešení.
- ▷ [1 bod] Výpočet $|\sphericalangle BFC| = 135°$.

Neúplné řešení: Za nedokončený výpočtový důkaz toho, že $F$ je středem vepsané kružnice $\triangle ABC$, neudělujte žádný bod navíc (k bodům souvisejícím s definicí bodu $M$).

Pokud řešitel přímo počítá $\operatorname{tg}|\sphericalangle BFC|$:

- ▷ [2 body] Samotný výpočet $\operatorname{tg}|\sphericalangle BFC| = -1$.
- ▷ [1 bod] Vyřešení rovnice $\operatorname{tg}|\sphericalangle BFC| = -1$.

Neúplné řešení: Za nedokončený výpočetní důkaz $\operatorname{tg}|\sphericalangle BFC| = -1$ neudělujte žádný bod navíc (k bodům souvisejícím s definicí bodu $M$).

Čtvrté řešení:

- ▷ [1 bod] Rozhodnutí uvažovat trojúhelník $DEI$, kde $I$ je střed kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$. Jde o bod udělovaný všeobecně za hypotézu, že $F = I$.
- ▷ [1 bod] Důkaz, že $I$ je středem kružnice opsané $\triangle EAD$.
- ▷ [1 bod] Důkaz, že $|ID| = |IE| = \varrho\sqrt{2}$.
- ▷ [2 body] Zdůvodnění, že $DEI$ je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, odkud $I = F$.
- ▷ [1 bod] Výpočet $|\sphericalangle BFC| = 135°$.

**4.** S ohledem na symetrii zadání můžeme předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$. Dokážeme, že platí odhad $a^2 \leqq b^2$. Ten je totiž ekvivalentní s $(b-a)(b+a) \geqq 0$, což platí díky $b \geqq a$ a $b + a \geqq 0$. Obdobně platí odhad $c^2 \leqq (1-b)^2$, protože ten je ekvivalentní s $(1-b-c)(1-b+c) \geqq 0$, přičemž $1-b-c \geqq 0$ a $1-b+c > -b+c \geqq 0$. Použitím obou odhadů máme

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqq b^2 + b^2 + (1-b)^2. \tag{1}$$

Dále platí $b + b \geqq a + b \geqq 0$ a $b + b \leqq b + c \leqq 1$, takže $b \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Zbývá najít maximum pravé strany (1) na tomto intervalu.

Pro $b = 0$ platí $b^2 + b^2 + (1-b)^2 = 1$. Dokážeme, že 1 je hledané maximum. Na to je třeba dokázat nerovnost $b^2 + b^2 + (1-b)^2 \leqq 1$. Ta platí, právě když $b(3b-2) \leqq 0$, což je splněno pro všechna $b \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle$, a tedy i pro všechna $b \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Jelikož pro $(a,b,c) = (0,0,1)$ platí $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, je hledané maximum opravdu rovno 1.

*Poznámka.* Výraz $b^2 + b^2 + (1-b)^2$ jsme na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ mohli maximalizovat i takto: Jelikož jde o kvadratickou funkci v proměnné $b$, jejímž grafem je parabola otevřená nahoru, může svého maxima nabýt pouze v krajních bodech intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Stačí tedy prověřit obě tyto hodnoty.

**Jiné řešení.** Zaveďme substituci $a + b = x$, $b + c = y$ a $c + a = z$. Čísla $x$, $y$, $z$ pak leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a platí $a = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $b = \frac{1}{2}(y - z + x)$, $c = \frac{1}{2}(z - x + y)$. Hodnota $a^2 + b^2 + c^2$ je po úpravě rovna

$$\frac{1}{4}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx). \tag{2}$$

Podívejme se na výraz (2) jako na kvadratickou funkci proměnné $x$. Víme, že $x \in \in \langle 0, 1 \rangle$. Koeficient u $x^2$ je kladný, takže grafem této funkce je parabola otevřená nahoru.

Tato funkce proto nabývá maxima jedině v některém z krajních bodů intervalu $\langle 0,1\rangle$ (je možné, že v obou). Stejnou úvahu však můžeme použít i pro proměnné $y$ a $z$. To znamená, že pro libovolná $x,y,z\in\langle 0,1\rangle$ symetrický výraz $V=V(x,y,z)$ z (2) splňuje nerovnosti

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &\leqq \max(V(0,y,z),V(1,y,z)) \leqq \\ &\leqq \max(V(0,0,z),V(0,1,z),V(1,0,z),V(1,1,z)) \leqq \\ &\leqq \max(V(0,0,0),V(0,0,1),V(0,1,0),V(0,1,1), \\ &\qquad\quad V(1,0,0),V(1,0,1),V(1,1,0),V(1,1,1)) = \\ &= \max(V(0,0,0),V(0,0,1),V(0,1,1),V(1,1,1)) = \max(0,\tfrac34,1,\tfrac34) = 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že výraz nabývá maximální hodnotu 1, právě když jsou právě dvě z proměnných $x$, $y$, $z$ rovny 1 a třetí je rovna 0. To odpovídá tomu, že právě dvě z proměnných $a$, $b$, $c$ jsou rovny 0 a třetí je rovna 1.

**Jiné řešení.** Po zavedení substituce jako v předchozím řešení nyní jiným způsobem ukážeme, že hodnota výrazu (2) je nejvýše 1, ať jsou čísla $x,y,z$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$ jakákoli.

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že platí $z=\max(x,y,z)$, a dotyčnou nerovnost zbavenou zlomku

$$3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2yz-2zx\leqq 4$$

upravíme do tvaru

$$2x(x-z)+2y(y-z)+(x-y)^2+3z^2\leqq 4.$$

Tuto nerovnost však získáme sečtením čtyř nerovností

$$2x(x-z)\leqq 0,\quad 2y(y-z)\leqq 0,\quad (x-y)^2\leqq 1,\quad 3z^2\leqq 3,$$

jejichž platnost je okamžitým důsledkem nerovností

$$0\leqq x\leqq z,\quad 0\leqq y\leqq z,\quad -1\leqq x-y\leqq 1,\quad 0\leqq z\leqq 1.$$

*Poznámka.* Toto řešení lze zapsat i bez proměnných $x$, $y$, $z$. Jednotlivé nerovnosti totiž odpovídají vztahům $2(a+b)(b-c)\leqq 0$, $2(b+c)(b-a)\leqq 0$, $(a-c)^2\leqq 1$, $3(a+c)^2\leqq 3$, jež platí za předpokladu $b=\min(a,b,c)$ (třetí díky tomu, že $-1\leqq(a+b)-(b+c)\leqq 1$). Součet levých stran těchto nerovností je přitom $4(a^2+b^2+c^2)$.

**Bodovací schéma.**

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Obecné poznámky:

1. Za uhodnutí maxima udělte 1 bod právě tehdy, je-li uvedena i trojice $(a,b,c)$, pro niž se tato hodnota nabývá.
2. Řešení, která se opírají o úvahy typu „pokud nějakou proměnnou zvětšíme, tak se výraz zvětší“, hodnoťte jako první řešení po převodu těchto úvah na nerovnosti.
3. Dílčí body z *různých* postupů se nesčítají.

1. řešení:

- ▷ [1 bod] Důkaz nerovnosti $a^2\leqq b^2$.
- ▷ [1 bod] Důkaz nerovnosti $c^2\leqq(1-b)^2$.

- ▷ [1 bod] Důkaz $b \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.
- ▷ [1 bod] Odhad zkoumaného výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ shora výrazem $b^2 + b^2 + (1 - b)^2$.
- ▷ [1 bod] Důkaz $b^2 + b^2 + (1 - b)^2 \leqq 1$ na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.
- ▷ [1 bod] Maximalizace tohoto výrazu a uvedení alespoň jedné trojice $(a, b, c)$, pro kterou se maximum nabývá.

Neúplné řešení:

1. Za samotný předpoklad $a \leqq b \leqq c$ ani za odtud plynoucí důsledek $0 \leqq b \leqq c$ nedávejte žádný bod.
2. Pokud řešitel chybně uvede, že $a^2 \leqq b^2$ vyplývá přímo z $a \leqq b$, strhněte 1 bod.
3. Pokud řešitel chybně uvede, že $c^2 \leqq (1 - b)^2$ vyplývá přímo z $c \leqq 1 - b$, strhněte 1 bod.
4. Bod za odhadnutí výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ shora výrazem $b^2 + b^2 + (1 - b)^2$ udělte jako dílčí i v případě, kdy nejsou potřebné nerovnosti $a^2 \leqq b^2$ a $c^2 \leqq (1 - b)^2$ dokázány.
5. Rovněž strhněte bod za algebraické chyby při maximalizaci výrazu $b^2 + b^2 + (1 - b)^2$.
6. Pokud řešitel rozebere pouze případ, kdy jsou čísla $a$, $b$ a $c$ všechna nezáporná (jedno z nich totiž může být záporné!), udělte nejvýše 3 body.

Řešení používající substituci $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$:

- ▷ [1 bod] Samotná substituce.
- ▷ [1 bod] Převedení zkoumaného výrazu do nových proměnných $x, y, z$.
- ▷ [4 body] Dokončení řešení (rozebrané níže).

Neúplné řešení:

1. Za chybu při převodu do proměnných $x, y, z$ strhněte 1 bod.
2. Za další chyby při algebraických úpravách strhněte 1 až 2 dva body, podle počtu a závažnosti chyb.

Dokončení řešení se substitucí ve stylu druhého řešení:

- ▷ [1 bod] Zdůvodnění, že maximum kvadratické funkce definované na $\langle 0, 1 \rangle$ s kladným koeficientem u kvadratického členu se nabývá jen v krajním bodě tohoto intervalu.
- ▷ [2 body] Použití tohoto tvrzení pro každou z proměnných $x, y, z$ a prozkoumání možných kombinací.
- ▷ [1 bod] Nalezení maximální hodnoty spolu s trojicí $(a, b, c)$, pro niž se nabývá.

Dokončení řešení se substitucí ve stylu třetího řešení:

- ▷ [3 body] Uhodnutí maximální hodnoty a důkaz potřebné nerovnosti.
- ▷ [1 bod] Uvedení alespoň jedné trojice $(a, b, c)$, pro niž se maximální hodnota nabývá.