66. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Ze zadání plyne, že $x \neq -2$. Po vynásobení výrazem $|x+2|$ dostáváme rovnici $|x+2| = |3x-7| - |9-2x|$, kterou nyní vyřešíme.

Nulové body tří absolutních hodnot s neznámou nám rozdělují reálnou osu na čtyři intervaly, v nichž má každý z odpovídajících dvojčlenů stále stejné znaménko, zatímco v krajních bodech je nulový. V každém z těchto intervalů už tedy můžeme řešit odpovídající rovnici bez absolutních hodnot.

- $x \in (-\infty, -2)$: dostáváme rovnici $-x-2 = -3x+7-(9-2x)$, která po úpravě přejde v identitu $0=0$. Všechna čísla ze zkoumaného intervalu původní rovnici vyhovují.
- $x \in \langle -2, \frac{7}{3})$: dostáváme rovnici $x+2 = -3x+7-(9-2x)$ neboli $2x=-4$ s jediným řešením $x=-2$, které jak už víme, původní rovnici nevyhovuje.
- $x \in \langle \frac{7}{3}, \frac{9}{2})$: dostáváme rovnici $x+2 = 3x-7-(9-2x)$ s řešením $x = \frac{9}{2}$, jež však v uvažovaném intervalu neleží.
- $x \in \langle \frac{9}{2}, \infty)$: dostáváme rovnici $x+2 = 3x-7-(-9+2x)$, která po úpravě přejde v identitu $0=0$. Vyhovují všechna x z tohoto intervalu.

Závěr. Všechna řešení úlohy tvoří množinu $(-\infty,-2) \cup \langle \frac{9}{2}, \infty)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správný postup (snahu o odstraňování absolutních hodnot) udělte 1 bod. Za vyšetření rovnice v každém z intervalů 1 bod. Závěr (explicitní uvedení množiny řešení) 1 bod. Za každý špatně spočítaný nulový bod strhněte 2 body (maximálně však 5 bodů). S rovnicí lze pracovat i v původním tvaru s neodstraněným zlomkem.

2. Nejprve vypočteme příslušné hodnoty výrazu V pro několik prvních lichých čísel:

n	$V(n)$
1	0
3	$168 = 3 \cdot 48 + 24$
5	$888 = 18 \cdot 48 + 24$
7	$2\,928 = 61 \cdot 48$
9	$7\,440 = 155 \cdot 48$

Mezi hledané zbytky tedy patří čísla 0 a 24. Ukážeme, že jiné zbytky už možné nejsou. K tomu stačí dokázat, že pro každé liché číslo n platí $24 \mid V(n)$. Z domácího kola víme, že pro každé přirozené číslo n platí $12 \mid V(n)$, tedy i $3 \mid V(n)$. Protože čísla 3 a 8 jsou nesoudělná, stačí ukázat, že pro každé liché číslo n platí $8 \mid V(n)$. Využijeme přitom rozkladu daného výrazu na součin

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2-1)(n^2+12) = (n-1)(n+1)(n^2+12). \qquad (1)$$

Libovolné liché přirozené číslo n lze zapsat ve tvaru $n = 2k-1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Pro takové n pak dostáváme

$$V(2k-1) = [(2k-1)-1][(2k-1)+1][(2k-1)^2+12] = 4(k-1)k(4k^2-4k+13),$$

a protože součin $(k-1)k$ dvou po sobě jdoucích celých čísel je dělitelný dvěma, je celý výraz dělitelný osmi.

Závěr. Daný výraz může dávat při dělení číslem 48 právě jen zbytky 0 a 24.

Poznámka. Poznatek, že $8 \mid V(n)$ pro každé liché n, lze dokázat i jinak, bez užití rozkladu (1). Je-li totiž $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, pak číslo

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$$

dává při dělení osmi (díky tomu, že jedno z čísel k, $k-1$ je sudé) zbytek 1, a tedy stejný zbytek dává i číslo n^4 (jakožto druhá mocnina lichého čísla n^2). Platí tedy $n^2 = 8u + 1$ a $n^4 = 8v + 1$ pro vhodná celá u a v, takže hodnota výrazu

$$V(2k-1) = (8v+1) + 11(8u+1) - 12 = 8(v + 11u)$$

je skutečně násobkem osmi.

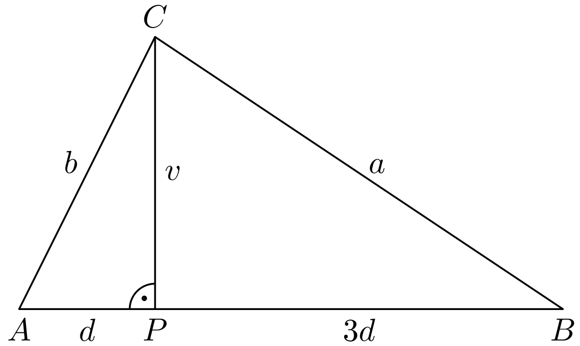
Připojme i podobný důkaz poznatku $3 \mid V(n)$ z domácího kola. Pro čísla n dělitelná třemi je to zřejmé, ostatní n jsou tvaru $n = 3k \pm 1$, takže číslo

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3k(3k \pm 2) + 1$$

dává při dělení třemi zbytek 1, stejně tak i číslo $n^4 = (n^2)^2$. Dosazení $n^2 = 3u + 1$ a $n^4 = 3v + 1$ do výrazu $V(n)$ už přímo vede k závěru, že $3 \mid V(n)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za využití faktu z domácího kola ($12 \mid V(n)$ pro libovolné n) k odvození (konstatování) toho, že zbytky mohou být pouze 0, 12, 24 a 36, udělte 1 bod. Za snahu dokázat, že $8 \mid V(n)$ pro n lichá, udělte 1 bod, za důkaz tohoto tvrzení udělte 2 body. Za závěr, že z $3 \mid V(n)$ a $8 \mid V(n)$ plyne $24 \mid V(n)$, udělte 1 bod (nesoudělnost čísel 3 a 8 musí být zmíněna; závěr typu „z $12 \mid V(n)$ a $8 \mid V(n)$ zřejmě plyne, že $24 \mid V(n)$“ nestačí, není-li např. dodáno, že 24 je nejmenší společný násobek čísel 8 a 12). Za ověření, že zbytky 0 a 24 jsou skutečně možné, udělte 1 bod (stačí uvést např. jen hodnoty $V(1)$ a $V(3)$).

3. Označme d délku úsečky AP a v délku výšky CP trojúhelníku ABC. Délky jeho stran označíme obvyklým způsobem a, b, c. Ze zadání tedy plyne $|PB| = 3d$ (obr. 1).



Obr. 1

Použitím Pythagorovy věty v trojúhelnících APC a PBC dostáváme rovnosti $b^2 = d^2 + v^2$ a $a^2 = 9d^2 + v^2$. Z druhého předpokladu úlohy pak plyne rovnost $a^2 = 3b^2$ neboli $9d^2 + v^2 = 3d^2 + 3v^2$, odkud $v^2 = 3d^2$. Dosazením do prvních dvou rovností tak dostáváme $a^2 = 12d^2$ a $b^2 = 4d^2$. A protože $c = 4d$ neboli $c^2 = 16d^2$, dokázali jsme, že pro délky stran trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Trojúhelník ABC je proto podle obrácené Pythagorovy věty pravoúhlý.

Poznámka. Uvážíme-li pomocný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a a b, pak pro jeho přeponu c' podle Pythagorovy věty platí $c'^2 = a^2 + b^2$. Porovnáním s odvozenou rovností $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme $c' = c$, takže původní trojúhelník je podle věty *sss* shodný s trojúhelníkem pomocným, a je tudíž vskutku pravoúhlý. Lze tolerovat názor, že sama Pythagorova věta udává nejen nutnou, ale i postačující podmínku k tomu, aby byl daný trojúhelník pravoúhlý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za napsání Pythagorovy věty v obou trojúhelnících APC a PBC dejte jeden bod. Za odvození vztahu $v^2 = 3d^2$ udělte 2 body, za jeho důsledek $a^2 + b^2 = c^2$ pak další 1 bod. Za učinění závěru, že potom je trojúhelník pravoúhlý, pak udělte dva body. Za různé manipulace s rovnicemi bez dosažení vztahu vedoucího ke správnému důkazu body neudělujte.