Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Kolik existuje čtyřmístných čísel takových, že jejich třetina, polovina, dvojnásobek a trojnásobek jsou všechno čtyřmístná čísla? *(M. Macko)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte

a) nejmenší dvojmístný násobek pěti, jehož polovina je dvojmístné číslo;
b) největší dvojmístný násobek šesti, jehož dvojnásobek je dvojmístné číslo;
c) nejmenší dvojmístný násobek osmi, jehož pětina je dvojmístné číslo.

[a) Číslo je násobkem desíti, ne menší než 20, nejmenší vyhovující je 20. b) Číslo je násobkem šesti, ne větší než 49, největší vyhovující je 48. c) Číslo je násobkem čtyřiceti, ne menší než 50, jediné vyhovující je 80.]

N2. Připomeňte si znaky dělitelnosti dvěma, třemi a šesti. Poté z číslic 2, 2, 5, 9 sestavte největší čtyřmístné číslo dělitelné šesti, které je menší než 5 123.

[Formulace i se zdůvodněními najdete v učebnicích nebo na internetu.[?] Mezi danými číslicemi jsou sudé číslice a součet všech číslic je 18, což je číslo dělitelné třemi. Tedy z daných číslic lze sestavit čísla dělitelná šesti, největší vyhovující je 2 952.]

N3. Kolik je sudých čísel větších než 123 a menších než 321?

[Vyhovující čísla jsou $124 = 2 \cdot 62$, $126 = 2 \cdot 63$, $\ldots$, $320 = 2 \cdot 160$. Těchto čísel je 99 $(= 160 - 62 + 1)$.]

D1. Zjistěte, kolik pětimístných čísel má následující dvě vlastnosti:

- v čísle se opakuje jedna číslice třikrát, zbylé dvě číslice jsou různé,
- třicetina tohoto čísla je trojmístné číslo.

[Podle druhé podmínky se jedná o pětimístná čísla dělitelná třemi a desíti, která jsou menší než 30 000. Tedy číslice na posledním místě je 0 a na prvním místě je buď 1, nebo 2. Podle první podmínky se některá číslice opakuje třikrát. Pokud se opakují tři prostřední číslice, pak ciferný součet (tedy i číslo samotné) není dělitelný třemi. Takové číslo není žádné. Pokud se třikrát opakuje první číslice (1 nebo 2), potom zbylá číslice může být 3, 6, nebo 9, a to na třech možných místech. Takových čísel je $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Pokud se třikrát opakuje poslední číslice (0) a první číslice je 1, resp. 2, potom zbylá číslice může být 2, 5, nebo 8, resp. 1, 4, nebo 7, a to pokaždé na třech možných místech. Takových čísel je $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Všech vyhovujících čísel je $18 + 18 = 36$.]

[?] Viz např. Wikipedii.

Z7–I–2

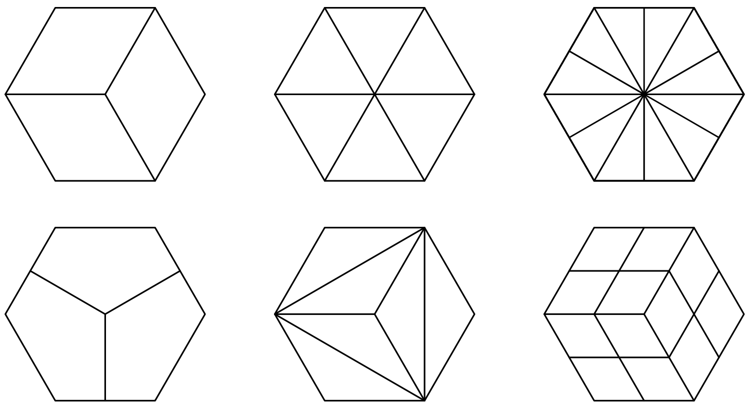
V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod G středem úhlopříčky AE. Určete poměr obsahů trojúhelníku ADG a šestiúhelníku $ABCDEF$.

(E. Semerádová)

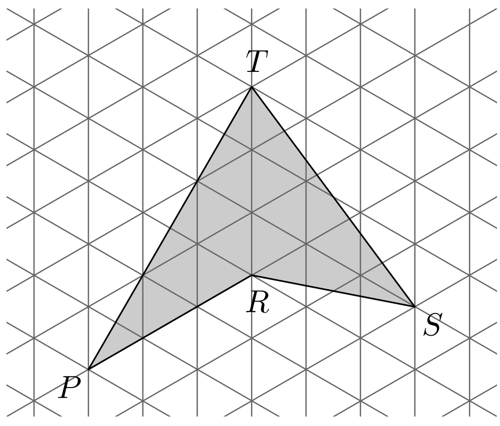
Návodné a doplňující úlohy

N1. Nejděte alespoň dva způsoby, jak rozdělit pravidelný šestiúhelník na a) tři; b) šest; c) dvanáct navzájem shodných částí.

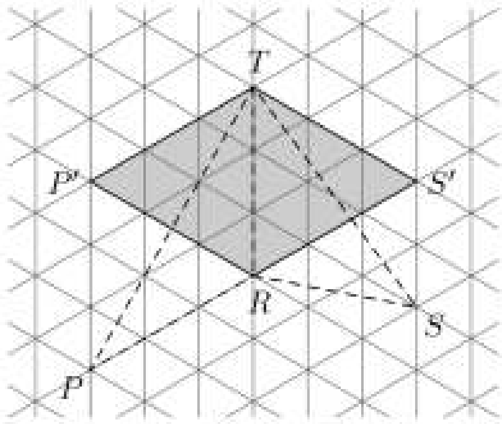
[Několik možných rozdělení je naznačeno na obrázcích níže.]



N2. Vrcholy čtyřúhelníku $PRST$ jsou mřížovými body trojúhelníkové sítě, jejíž základní trojúhelník má obsah $1\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $PRST$.

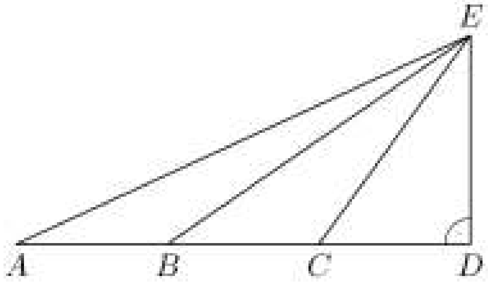


[Trojúhelníky RTP a RTP', resp. trojúhelníky RTS a RTS' na následujícím obrázku mají stejný obsah (mají společnou stranu RT a stejné výšky na tuto stranu). Tedy čtyřúhelník $PRST$ má stejný obsah jako čtyřúhelník $P'RS'T$, a to je kosočtverec sestávající z 18 základních trojúhelníků. Čtyřúhelník $PRST$ má obsah $18\,\mathrm{cm}^2$.]



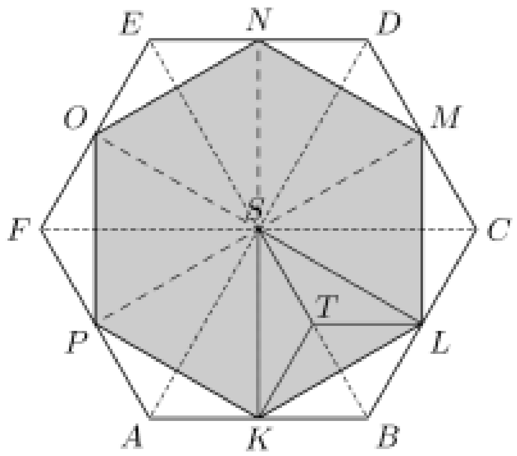
N3. Trojúhelník ADE je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D. Na straně AD jsou body B a C tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Popište vztahy mezi obsahy trojúhelníků ADE, ABE, BCE a BDE.

[Všechny trojúhelníky mají společný vrchol E a stejné odpovídající výšky. Tedy vztahy mezi jejich obsahy jsou stejné jako vztahy mezi stranami protilehlými vrcholu E. Pro obsahy trojúhelníků platí $S_{ABE} = S_{BCE} = 1/3\, S_{ADE}$ a $S_{BDE} = 2\, S_{BCE} = 2/3\, S_{ADE}$.]



D1. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou body K, L, M, N, O, P postupně středy jeho stran. Určete poměr obsahů šestiúhelníků $ABCDEF$ a $KLMNOP$.

[Šestiúhelníky mají společný střed S. Trojúhelník KLS je rovnostranný a lze jej rozdělit na tři shodné rovnoramenné trojúhelníky se společným vrcholem T. Ty jsou shodné s trojúhelníkem KBL, tedy poměr obsahů čtyřúhelníku $KBLS$ a trojúhelníku KLS je $4 : 3$. Ze souměrnosti celého útvaru plyne, že stejný poměr je také mezi obsahy šestiúhelníků $ABCDEF$ a $KLMNOP$.]



Z7–I–3

Pan Komický, Elegantní a Vážný se znají z golfu. Jeden se jmenuje Karel, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu barvy krémové, jeden barvy ebenové a jeden barvy vínové.

- *Výherce posledního utkání nosí ebenovou kravatu.*
- *Pan Elegantní nebyl nikdy na návštěvě u pana Komického.*
- *Viktor nosí krémovou kravatu.*
- *Panu Komickému připadá vtipné, že nikdy nevyhrál.*
- *Karel byl po posledním utkání u pana Komického.*
- *Pan Vážný nosí vínovou kravatu.*

Zjistěte, jaké je vlastní jméno každého z pánů a jakou kdo nosí kravatu.

(E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Zebra, žirafa, slonice a tygřice se každá věnuje jinému zimnímu sportu.

- Zebra, ani žirafa nesáňkuje.
- Slonice nelyžuje.
- Tygřice nehraje hokej.
- Zebra se přátelí s lyžařkou a hokejistkou.
- Tygřice se přátelí s bobistkou a sáňkařkou.

Zjistěte, který sport kdo provozuje.

[Zebra nesáňkuje, nelyžuje, ani nehraje hokej, tedy bobuje. Tygřice nehraje hokej, nebobuje, ani nesáňkuje, tedy lyžuje. Žirafa nesáňkuje, nebobuje, ani nelyžuje, tedy hraje hokej. Na slonici zbývá sáňkování (což je v souladu s informací ze zadání).]

N2. Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let.

[Všechny vztahy lze postupně doplňovat do tabulky níže; kurzívou jsou vyznačeny bezprostřední postřehy ze zadání, ostatní jsou odvozené.[?]]

věk	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
rasa	ovčák	*vlkodav*	dalmatin	*jezevčík*
jméno	*Rubby*	*Bucki*	*Oddi*	Punťa
země	Belgie	Irsko	Řecko	Dolní Lhota

D1. Ve třech sousedních domech v řadové zástavbě žily Xenie, Yveta a Zita se svými mazlíčky. Jedna chovala morče, jedna psa a jedna kočku.

- Xenie bydlí vedle domu se psem.
- Morče a kočka nebydlí v sousedních domech.
- Zita nemá kočku.
- Morče nebydlí vedle Yvety.

S kým bydlí pes?

[Podle druhé informace bydlí v krajních domech morče a kočka, v prostředním pes. Podle první informace bydlí Xenie v některém z krajních domů. Podle zbylých informací bydlí Yveta buď s morčetem, nebo s kočkou a Zita se psem.]

D2. Do třídy přibyl nový žák, o kterém se vědělo, že kromě angličtiny umí výborně ještě jeden cizí jazyk. Tři spolužáci se dohadovali, který jazyk to je.

První soudil: „Francouzština to není.“

Druhý hádal: „Je to španělština nebo němčina.“

Třetí usuzoval: „Je to španělština.“

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z5–I–3**.

Záhy se dozvěděli, že to opravdu byl jeden z těchto tří jazyků a že alespoň jeden ze spolužáků hádal správně a alespoň jeden nesprávně.

Určete, který ze jmenovaných jazyků nový žák ovládal.

[Kdyby tím jazykem byla francouzština, pak by všichni tři spolužáci hádali nesprávně. Kdyby to byla španělština, pak by všichni tři hádali správně. Kdyby to byla němčina, pak by první dva hádali správně a třetí nesprávně. Nový žák ovládal němčinu.[?]]

Z7–I–4

Adéla, Beáta, Šárka a Jitka si natrhaly třešně. Beáta jich měla pětkrát víc než Adéla, Šárka měla o 15 třešní víc než Beáta, Jitka měla o 200 víc než Adéla.

O kolik nejméně se mohly lišit počty třešní Šárky a Jitky? A kolik třešní by v takovém případě měla každá z dívek? *(K. Pazourek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pro neznámé číslo platí, že jeho trojnásobek je menší než toto číslo zvětšené o 33. Najděte všechna přirozená čísla s touto vlastností.

[Pro neznámé číslo n má platit $3n < n + 33$ neboli $n < 16{,}5$. Vyhovuje prvních 16 přirozených čísel.]

N2. Najděte nejbližší násobek sedmi k nejbližšímu násobku patnácti k největšímu sudému trojmístnému číslu.

[Největší sudé trojmístné číslo je 998. Nejbližší násobek patnácti k 998 je 1005 ($= 15 \cdot 67$). Nejbližší násobek sedmi k 1005 je 1008 ($= 7 \cdot 144$), a to je hledané číslo.]

N3. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí, že b je o 5 větší než a a d je o 8 menší než c. O kolik se mohou lišit

a) rozdíly $a - c$ a $b - d$;
b) součty $a + c$ a $b + d$;
c) součty $a + b$ a $c + d$?

[Platí $b = a + 5$ a $d = c - 8$. a) Odtud $b - d = a - c + 13$, tedy uvedené rozdíly se liší o 13. b) Dále $b + d = a + c - 3$, tedy uvedené součty se liší o 3. c) Dále $a + b = 2a + 5$ a $c + d = 2c - 8$, tedy uvedené součty se mohou lišit o jakoukoli lichou hodnotu (první číslo je liché, druhé sudé).]

D1. Adam, Bořek a Čenda porovnávali, kolik kg kaštanů nasbírali. Zjistili, že aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Bořkem, je o 10 kg větší než Čendův příspěvek. A aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Čendou, je o 3 kg menší než Bořkův příspěvek. Určete rozdíl mezi aritmetickým průměrem toho, co nasbíral Bořek s Čendou, a Adamovým příspěvkem.

[Množství kaštanů (v kg) nasbírané jednotlivými chlapci označíme jejich počátečními písmeny, hledaný rozdíl označíme x:

$$\frac{a+b}{2} = c + 10, \quad \frac{a+c}{2} = b - 3, \quad \frac{b+c}{2} = a - x.$$

[?] Převzato ze 68. ročníku MO, úloha **Z8–I–2**.

Součet těchto tří rovnic dává $a + b + c = a + b + c + 7 - x$ neboli $x = 7$. Hledaný rozdíl je 7 kg.[7]]

Z7–I–5

Václav měl několik bílých kostek. Na každé kostce nabarvil tři různé stěny třemi různými barvami, a to červenou, zelenou a modrou. Poté roztřídil kostky do skupin podle typu obarvení tak, že všechny kostky v jedné skupině vypadaly po vhodném otočení stejně.

Kolik nejvýše skupin mohl Václav vytvořit? *(I. Jančigová)*

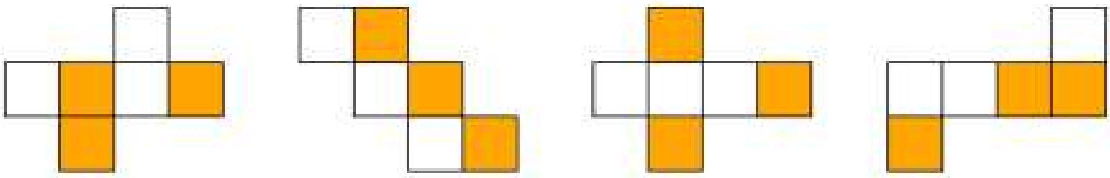
Návodné a doplňující úlohy

V následujících čtyřech úlohách jsou různými obarveními útvaru myšlena taková obarvení, která po žádném otočení útvaru nevypadají stejně (to v soutěžní úloze odpovídá různým Václavovým skupinám).

N1. Kolika různými způsoby lze obarvit a) dvě; b) tři stěny bílé krychle na oranžovo?

[a) Dvěma způsoby (obarvené stěny jsou buď sousední, nebo protilehlé). b) Dvěma způsoby (obarvené stěny buď mají společný vrchol, nebo po rozvinutí tvoří pás).]

N2. Rozdělte následující obarvené sítě do skupin tak, aby po jejich složení byly různě obarvené krychle v různých skupinách.



[Složené krychle jsou znázorněny níže. Skupiny jsou dvě (viz předchozí úlohu): první a třetí případ patří do jedné skupiny, druhý a čtvrtý do druhé.]

N3. Kolika různými způsoby lze obarvit tři stěny bílé krychle tak, aby jedna stěna byla modrá a dvě červené?

[Jeden způsob je pro obarvené stěny se společným vrcholem, dva pro obarvené stěny bez společného vrcholu (v rozvinutém pásu je modrá buď uprostřed, nebo na kraji). Celkem rozlišujeme tři způsoby.]

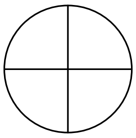
D1. V obchodě mají dva druhy obdélníkových ubrusů se vzory jako na obrázku. Trojúhelníkové části u prvního vzoru jsou shodné, obdélníkové části u druhého nejsou shodné. U každého ubrusu mají jeho tři části navzájem různé barvy, a to červenou, zelenou a modrou. Žádné dva ubrusy v obchodě nejsou obarveny stejně. Kolik ubrusů je v obchodě?

[7] Převzato ze 71. ročníku MO, úloha Z9–I–1.

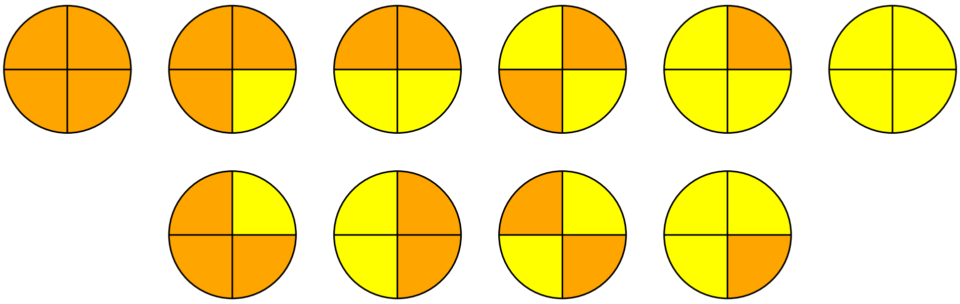
[V obou případech je všech možných obarvení šest (3 barvy pro jednu část, 2 zbylé barvy pro druhou a barva pro třetí část zbývá jediná). Levý obrazec je středově souměrný, tj. při otočení o 180° si trojúhelníkové části odpovídají. Různá obarvení jsou určena barvou prostření části, tedy jsou tři. V pravém obrazci si jeho části neodpovídají při žádném otočení, tedy různých obarvení je šest. V obchodě je devět ubrusů.]

D2. Následující obrazec je kruh rozdělený dvěma kolmými průměry na části. Obarvěte jeho čtyři části dvěma barvami tak, aby žádná část nezůstala neobarvená. Zjistěte, kolika různými způsoby to lze udělat, pokud za různá obarvení považujeme taková, která nevypadají stejně po

a) žádné osové souměrnosti;
b) žádné středové souměrnosti;
c) žádném otočení.



[Všech možných obarvení je 16 (na každou z částí lze použít dvě barvy a části jsou čtyři). a) Až na osové souměrnosti rozlišujeme 6 způsobů, viz první řádek na obrázku níže. b) Až na středové souměrnosti rozlišujeme 10 způsobů, viz všechny možnosti na obrázku níže. c) Až na otáčení rozlišujeme 6 způsobů, a ty se shodují s těmi v a).]



Z7–I–6

Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí:

- *strana AD a úhlopříčka BD jsou shodné,*
- *úhlopříčka BD a strana DC jsou kolmé,*
- *strany AB a BC jsou kolmé,*
- *osa úhlu BDC a strana AD jsou kolmé.*

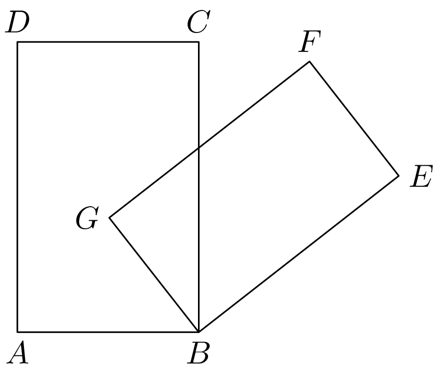
Určete velikost úhlu BCD. *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V trojúhelníku ABC jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A a B po řadě 56° a 108°. Bod S je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ABS, BCS a CAS.

[Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° a osa úhlu příslušný úhel půlí. S těmito poznatky postupně odvodíme, že velikost úhlu ACB je 16°, velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABS jsou 28°, 54°, 98°, v trojúhelníku BCS jsou 54°, 8°, 118° a v trojúhelníku CAS jsou 8°, 28°, 144°.]

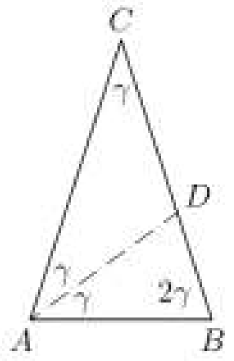
N2. Pro dva obdélníky $ABCD$ a $BEFG$ se společným vrcholem B platí, že velikost úhlu ABG je 52°. Určete velikost úhlu CBE.



[Obdélníky sdílí společný úhel GBC a u vrcholu B mají stejné vnitřní (pravé) úhly. Tedy $\sphericalangle ABG + \sphericalangle GBC = \sphericalangle GBC + \sphericalangle CBE$ (= 90°), a proto $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABG$. Velikost úhlu CBE je 52°.]

N3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod D, který je průsečíkem strany BC a osy úhlu BAC. Dále platí, že úsečky AD a DC jsou shodné. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

[Trojúhelník ACD je rovnoramenný s rameny AD a DC, tedy $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$, a tento úhel označíme γ. Úsečka AD je osou úhlu BAC, tedy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC = \gamma$. Trojúhelník ABC je rovnoramenný s rameny AC a CB, tedy $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB = 2\gamma$. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC je $5\gamma = 180°$, tedy $\gamma = 36°$. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou 72°, 72° a 36°.]



D1. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A a B po řadě $26°$ a $78°$. Bod E je průsečíkem os vnitřních úhlů u vrcholů C a D. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku CDE.

[Základny jsou rovnoběžné, tedy vnější úhly u vrcholů C, resp. D jsou shodné s vnitřními úhly u vrcholů B, resp A (střídavé úhly). Součtem vnějšího a vnitřního úhlu je přímý úhel a osa úhlu příslušný úhel půlí. S těmito poznatky postupně odvodíme, že velikosti úhlů BCD, resp. ADC jsou $102°$, resp. $154°$, velikosti úhlů ECD, resp. EDC jsou $51°$, resp. $77°$ a velikost úhlu CED je $52°$. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku CDE jsou $51°$, $77°$ a $52°$.]