Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi.*

Návodné úlohy:

1. Najděte všechna trojmístná čísla $\overline{abc}$ taková, že $\overline{ab} \cdot c$ je trojmístné číslo s třemi stejnými číslicemi. [373, 376, 379, 743, 746, 749]
2. Najděte největší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ je trojmístné číslo s třemi stejnými číslicemi. [7 412]

D1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, taková, že $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je čtyřmístné číslo se čtyřmi stejnými číslicemi. [5 645, 6 734, 7 823, 8 912]

D2. Najděte všechna čtyřmístné čísla $\overline{abcd}$, takové že $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je trojmístné číslo s třemi stejnými číslicemi. [2 017, 2 314, 2 611, 2 908, 3 205, 4 034, 4 331, 5 655, 5 754, 5 853, 5 952, 6 051, 7 771, 9 491]

2. *Určete největší možný počet neprázdných po dvou disjunktních množin se stejnými součty prvků, na které lze rozdělit množinu*

a) $\{1, 2, \ldots, 2\,017\}$,

b) $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$.

Je-li množina tvořena jedním číslem, považujeme ho za součet jejích prvků.

Návodné úlohy:

1. Najděte vzorec pro součet čísel $1 + 2 + \ldots + n$. [$n(n+1)/2$]
2. Zdůvodněte, že pokud rozdělíme 2 000 holubů do 1 001 klícek, bude nějaká klícka buď prázdná, nebo v ní bude pouze jeden holub. [Pokud by v každé klícce byli alespoň dva holubi, bylo by holubů dohromady alespoň $2 \cdot 1\,001 = 2\,002$, což dává spor.]

D1. Na kolik nejvíce neprázdných množin se stejným součtem je možné rozdělit množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$? [$\lfloor (n+1)/2 \rfloor$, tj. $(n+1)/2$, pokud je n liché, a $n/2$, pokud je n sudé]

D2. Na kolik nejvíce neprázdných množin se součty prvků dělitelnými třemi je možné rozdělit množinu $\{1, 2, \ldots, 3m\}$? [Příkladem rozdělení na $2m$ množin je m dvouprvkových množin $\{3k-2, 3k-1\}$ a m jednoprvkových množin $\{3k\}$. Vysvětlíme, proč rozdělení na více než $2m$ množin neexistuje. Při libovolném vyhovujícím rozdělení můžeme od každé víceprvkové množiny obsahující násobek tří toto číslo „odtrhnout“ jako jednoprvkovou množinu, a vytvořit tak početnější rozdělení. Proto při hledání dotyčného maxima můžeme uvažovat jen rozdělení, ve kterých všech m násobků tří tvoří jednoprvkové množiny. Každé z ostatních $2m$ čísel pak leží v nějaké množině s nejméně dvěma prvky, takže víceprvkových množin je nejvýše $(3m - m) : 2 = m$.]

D3. Najděte vzorec pro součet čísel $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$. [$n^2$]

3. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, v němž D značí patu výšky z vrcholu C. V polorovině s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C uvažujme body E, F takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na úsečce CD.*

Návodné úlohy:

1. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme D patu výšky z vrcholu C. Ukažte, že platí tzv. Eukleidovy věty $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ a $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$.
2. Je dán trojúhelník ABC, ve kterém D označuje patu výšky z vrcholu C. V polorovině ABC uvažujme body F, E takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na přímce CD. [Využijte podobnost pravoúhlých trojúhelníků.]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, ve kterém D označuje patu výšky z vrcholu C. V polorovině ABC uvažujme body F, E takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že se přímky AE a BF protínají na úsečce DG, kde G je střed úsečky CD. [Uvažte, že délka jednoho z úseků c_a, c_b je nejvýše rovna polovině délky přepony AB.]

D2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, ve kterém D označuje patu výšky z vrcholu C. V polorovině ABC uvažujme body F, E takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímka EF protíná úsečku CD. [Přímka EF protne polopřímku DC ve vzdálenosti $2c_ac_b/(c_a + c_b)$ od bodu D. Nebo uvažte, že průsečík úhlopříček lichoběžníku či pravoúhelníku $BEFA$ půlí odpovídající příčku, a použijte D1.]

4. *Určete největší celé číslo n, při kterém lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 3×3 byla zapsána aspoň jedna druhá mocnina celého čísla.*

Návodné úlohy:

1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla zapsána alespoň jedna druhá mocnina celého čísla. [Jde to pro každé n — čtverce $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ zapíšeme na úhlopříčku.]
2. Určete největší celé číslo n, při kterém je možné čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 2×2 byla zapsána alespoň jedna druhá mocnina celého čísla. [$n = 5$]

D1. Do čtvercové tabulky 11×11 jsme vepsali přirozená čísla $1, 2, \ldots, 121$ postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou 4×4 jsme všemi možnými způsoby zakryli právě 16 políček. Kolikrát byl součet zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla? [65–B–I–2]

D2. Čtvercovou tabulku 6×6 zaplníme všemi celými čísly od 1 do 36.

a) Uveďte příklad takového zaplnění tabulky, že součet každých dvou čísel ve stejném řádku nebo sloupci je větší než 11.

b) Ukažte, že při libovolném zaplnění tabulky se v některém řádku nebo sloupci najdou dvě čísla, jejichž součet nepřevyšuje 12. [66–C–II–2]

5. *Je dána kružnice $k(O,r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice. Vyjádřete její poloměr ϱ pomocí daných délek d a r.*

Návodné úlohy:

1. Je dána kružnice $k(O,r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Prochází kružnice opsaná trojúhelníku BCO bodem A? [Ano, je to Thaletova kružnice nad úsečkou AO.]
2. Je dána kružnice $k(O,r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Trojúhelníku ABC je připsána kružnice ke straně BC. Leží její střed na kružnici k? [Ano, označme $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ a dopočítejme velikosti úhlů při osách vnějších úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech B a C.]

D1. Je dán trojúhelník ABC se středem I vepsané kružnice. Průsečík osy strany BC s obloukem opsané mu kružnice, který neobsahuje vrchol A, označme O. Dokažte, že kružnice $k(O, |OB|)$ prochází bodem I. [Nejprve zdůvodněte, proč bod O leží na polopřímce AI (která je osou úhlu BAC) a potom vyjádřete pomocí velikostí úhlu trojúhelníku ABC velikost úhlů IBO a BOI.]

D2. V rovině jsou dány kružnice k a l, které se protínají v bodech E a F. Tečna ke kružnici l sestrojená v bodě E protíná kružnici k v bodě H ($H \neq E$). Na oblouku EH kružnice k, který neobsahuje bod F, zvolme bod C ($E \neq C \neq$ $\neq H$) a průsečík přímky CE s kružnicí l označme D ($D \neq E$). Dokažte, že trojúhelníky DEF a CHF jsou podobné. [66–B–II–3]

6. *Na kruhovém opevnění hradu je několik věží. Do nich se rozmístí pět černých a pět rudých rytířů (v každé věži jich může být více i různých barev) a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny přejdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Dokažte následující tvrzení:*

a) Je-li věží osm, mohou se rytíři na počátku rozmístit tak, že během každé hodiny bude v každé věži aspoň jeden rytíř.

b) Je-li věží sedm, některou hodinu zůstane aspoň jedna věž neobsazená, ať se na počátku rytíři rozmístí jakkoliv.

Návodné úlohy:

1. Na kruhovém opevnění hradu jsou čtyři věže. Do nich se rozmístí dva černí a dva rudí rytíři a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny projdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Rozmístěte rytíře tak, aby během každé hodiny byla každá věž střežená. [Stačí rozmístit rytíře tak, aby v sousedních věžích nebyli rytíři stejné barvy.]
2. Na kruhovém opevnění hradu jsou tři věže. Do nich se rozmístí dva černí a dva rudí rytíři a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny projdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Umíte rozmístit rytíře tak, aby během každé hodiny byla každá věž střežená? [Ne. Na počátku strážení vyberte jednu věž X, kterou nehlídají černí rytíři, a jednu věž Y, kterou nehlídají rudí rytíři. Podobně lze nestřežené věže v dalších hodinách určit posunem Y a X ve

směru, resp. v protisměru chodu hodinových ručiček. Co tři hodiny tak bude platit $X = Y$.]

D1. a) Mařenka rozmístí do vrcholů pravidelného osmiúhelníku různé počty od jednoho po osm bonbonů. Petr si pak může vybrat, které tři hromádky bonbonů dá Mařence, ostatní si ponechá. Jedinou podmínkou je, že tyto tři hromádky leží ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku. Mařenka chce rozmístit bonbony tak, aby jich dostala co nejvíce, ať už Petr trojici vrcholů vybere jakkoli. Kolik jich tak Mařenka zaručeně získá?

b) Stejnou úlohu vyřešte i pro pravidelný devítiúhelník, do jehož vrcholů rozmístí Mařenka 1 až 9 bonbonů. (Mezi rovnoramenné trojúhelníky zařazujeme i trojúhelníky rovnostranné.) [66–C–I–6]

D2. Každému vrcholu pravidelného 66úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo -1. Ke každé úsečce spojující dva jeho vrcholy (straně nebo úhlopříčce) pak připíšeme součin čísel v jejích krajních bodech a všechna čísla u jednotlivých úseček sečteme. Určete nejmenší možnou a nejmenší nezápornou hodnotu takového součtu. [66–B–I–1]