Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Andulka a Zuzana pojídaly švestky. První den snědla Andulka tři čtvrtiny toho, co týž den snědla Zuzana. Druhý den snědla Zuzana tři poloviny toho, co týž den snědla Andulka. Dohromady za oba dny snědly 31 švestek a každé děvče každý den snědlo celý počet švestek.

Kolik švestek snědla za oba dny Andulka? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Tonda se účastnil běžeckého závodu, v němž startovalo 15 závodníků. Po vyhlášení výsledků zjistil, že jeho startovní číslo je třemi polovinami čísla určujícího jeho pořadí v závodě. Kolikátý mohl Tonda doběhnout? Určete všechny možnosti.

[Startovní číslo bylo násobkem tří, tj. 3, 6, 9, 12, nebo 15. Tonda mohl doběhnout na 2., 4., 6., 8., nebo 10. místě.]

N2. Pejsek a kočička o víkendu zavařovali meruňky. V sobotu pejsek zavařoval o čtvrt hodiny déle než kočička. V neděli kočička zavařovala o šestinu času déle než pejsek. Za celý víkend zavařovala kočička o pět minut déle než pejsek. Jak dlouho v neděli zavařoval pejsek?

[Šestina pejskova nedělního času byla $15 + 5 = 20$ minut. Pejsek v neděli zavařoval 2 hodiny.]

N3. Patrik si dovezl z prázdnin od babičky košík švestek. V úterý snědl o čtvrtinu více švestek než v pondělí, ve středu dvě třetiny toho co v úterý, ve čtvrtek o 8 švestek méně než ve středu a v pátek pětkrát tolik co ve čtvrtek, což bylo stejně jako ve středu. Kolik švestek dohromady snědl?

[Aby souhlasily počty ve středu a v pátek, musel ve čtvrtek sníst 2 švestky ($2+8 = 5\cdot 2$). Tedy ve středu a v pátek snědl 10 švestek, v úterý 15 a v pondělí 12. Patrik snědl dohromady 49 švestek.]

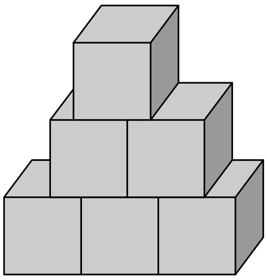
N4. Marta a Nikola vyráběly během letních prázdnin náramky pro kamarádky. Marta v srpnu vyrobila o tři čtvrtiny náramků více než v červenci. Nikola v srpnu vyrobila o třetinu náramků méně než v červenci. Kolik náramků mohly dohromady během prázdnin vyrobit? Určete dvě nejmenší hodnoty.

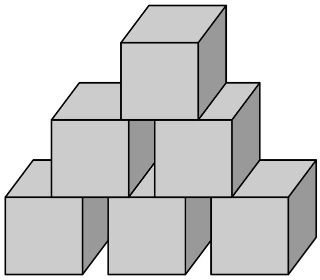
[Nejmenší počty náramků, které mohla děvčata vyrobit jsou: Marta v červenci 4 a v srpnu 7, Nikola v červenci 3 a v srpnu 2, tedy dohromady 16 kusů. Druhý nejmenší počet náramků je 32.]

Z7–I–2

Mikuláš postavil pyramidu ze šesti stejných krychlí s hranami délky 7 cm. Spodní patro tvořily tři krychle, prostřední patro dvě krychle a horní patro jedna krychle. Sousední krychle v každém patře měly společnou stěnu, patra navzájem nepřečnívala. Vítězslav posunul krychle tak, že každá krychle v horních dvou patrech stála na dvou spodnějších krychlích *a mezi sousedními krychlemi ve spodních dvou patrech byly mezery široké třetinu hrany krychle. Až na tyto mezery patra navzájem nepřečnívala.*

O kolik cm^2 se liší povrchy původní a upravené pyramidy? *(V. Dedek)*



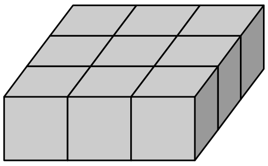


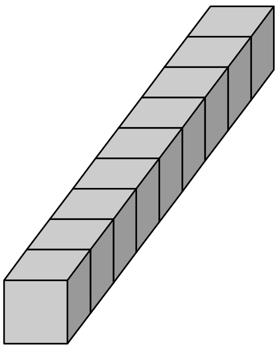
Návodné a doplňující úlohy

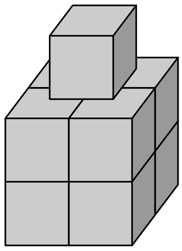
N1. Stavba ze shodných krychlí musí splňovat, že každá z krychlí se dotýká alespoň jedné jiné krychle a že dotýkající se krychle mají společnou celou stěnu. Najděte způsob, jak z devíti krychlí s hranami délky 1 cm vytvořit stavbu, která má povrch:

a) $30\,\mathrm{cm}^2$,
b) $38\,\mathrm{cm}^2$,
c) $28\,\mathrm{cm}^2$.

[Každá stěna má obsah $1\,\mathrm{cm}^2$, devět samostatných krychlí má celkový povrch $6 \cdot 9 = 54\,\mathrm{cm}^2$. Rozdíl od povrchu stavby odpovídá dvojnásobku dotýkajících se stěn. Možné stavby vyhovující a), b) a c) jsou na obrázku níže.]

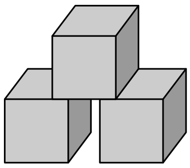




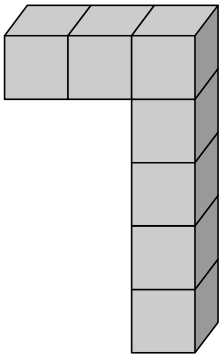


N2. Jonáš si hraje se třemi krychlemi s hranami délky 4 cm. Chce z nich postavit stavbu, která bude mít co největší povrch a přitom se každá z krychlí dotýká alespoň jedné další krychle nejméně čtvrtinou jedné své stěny. Jak může výsledná stavba vypadat a jaký bude mít povrch?

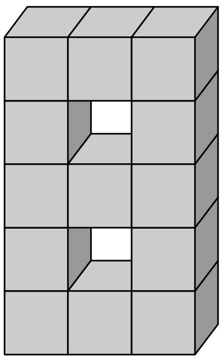
[Aby stavba měla maximální povrch, musí být dotyk stěn co nejmenší, tedy právě čtvrtinou stěny. V takovém případě je povrch stavby o jednu stěnu menší než součet povrchů tří samostatných kostek, tj. $3 \cdot 6 \cdot 16 - 16 = 272\,\mathrm{cm}^2$. Možná podoba stavby je na obrázku.]



N3. Anička vytvořila bráškovi k sedmým narozeninám přání ze sedmi shodných krychlí ve tvaru číslice sedm. Sousední krychle k sobě slepila celými stěnami, výsledný útvar nalepila na karton a dostupné stěny krychlí nabarvila na modro. Bráškovi se přání líbilo, a tak Anička zvažovala, že mu obdobné vytvoří i za rok, k čemuž bude potřebovat o šest krychlí více než nyní. O kolik více stěn bude muset nabarvit?



[Příští rok bude skládat číslici 8, viz obrázek. Nové krychle se dotýkají starých ve třech stěnách. Na jedné nové krychli bude barvit 2 stěny, na ostatních po 3 stěnách. Počet stěn, které bude Anička barvit navíc, je $17 - 3 = 14$.]



D1. Řešte soutěžní úlohu pro pyramidy s jinými počty kostek a pater (např. pro 10 kostek ve 4 patrech či 15 kostek v 5 patrech).

[Vyplatí se rozlišovat přírůstky na svislých a vodorovných stěnách. Pro pyramidu z 10 kostek se povrch zvětší o 16 stěn, tj. o $784\,\mathrm{cm}^2$. Pro pyramidu z 15 kostek se povrch zvětší o 26 a $\frac{2}{3}$ stěn, tedy přibližně o $1306{,}7\mathrm{cm}^2$.]

Z7–I–3

Pankrác, Servác a Bonifác se ubytovali v hotelu. Čísla pokojů byla trojmístná a číslice na místě stovek určovala patro, na kterém se pokoj nacházel. U snídaně si podle přívěsků na klíčích od pokojů všimli, že:

- *v číslech jejich pokojů jsou použity všechny číslice od 1 do 9,*
- *Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, Servácovo číslo je dělitelné osmi, Bonifácovo číslo je dělitelné sedmi,*
- *Bonifácovo číslo je čtyřikrát větší než Pankrácovo číslo,*
- *Servác bydlí na patře mezi Pankrácem a Bonifácem.*

Určete čísla pokojů Pankráce, Serváce a Bonifáce. *(L. Hozová, E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte všechna dvojmístná čísla, která po vynásobení šesti dávají dvojmístný výsledek, přičemž původní číslo a výsledek tvoří čtyři různé číslice.

[Dvojmístná čísla s dvojmístným výsledkem po násobení šesti jsou čísla od 10 do 16. Všem podmínkám ze zadání vyhovují jedině čísla 13 ($13 \cdot 6 = 78$) a 15 ($15 \cdot 6 = 90$).]

N2. Najděte všechna trojmístná čísla, která po vynásobení osmi dávají trojmístný výsledek, přičemž původní číslo a výsledek tvoří šest různých číslic.

[Trojmístná čísla s trojmístným výsledkem po násobení osmi jsou čísla od 100 do 124. Pouze deset z těchto čísel je tvořeno různými číslicemi. Všem podmínkám ze zadání vyhovují jedině čísla 103, 104, 107, 109 a 123.]

N3. Jirka si nemohl vzpomenout na kód k zámku od kola. Věděl jen, že jeho kód je čtyřmístný, číslice v kódu jsou uspořádány sestupně a celý kód je dělitelný 25. Určete všechny možné kódy, které by měl Jirka vyzkoušet.

[Dělitelnost 25 určuje poslední dvojčíslí, z nichž sestupné číslice má jedině 75 a 50. Možné Jirkovy kódy jsou 9875, 9850, 9750, 9650, 8750, 8650, 7650.]

D1. Julča, Klára a Maruška šly do bazénu. Čísla jejich skříněk splňovala:

- všechna tři čísla byla dvojmístná,
- žádná číslice se v těchto číslech neopakovala,
- Julčino a Klářino číslo byla prvočísla,
- Maruščino číslo bylo trojnásobkem Julčina čísla,
- Klářino číslo bylo větší než Julčino a menší než Maruščino číslo.

Jaká mohla být čísla skříněk? Určete všechny možnosti.

[Dvojmístná prvočísla, jejichž trojnásobek je dvojmístným číslem, jsou 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Pouze čísla 19, 23, 29 jsou spolu se svými trojnásobky tvořena různými číslicemi. V těchto mezích hledáme prvočísla, jež jsou spolu s ostatními dvěma čísly tvořena různými číslicemi. Možné trojice čísel Julči, Kláry a Marušky jsou: $(19, 23, 57)$, $(19, 43, 57)$; $(23, 41, 69)$, $(23, 47, 69)$; $(29, 31, 87)$, $(29, 41, 87)$, $(29, 43, 87)$, $(29, 53, 87)$, $(29, 61, 87)$.]

Z7–I–4

V jedné z pěti nádob očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 je mince. Doprovodné nápisy oznamují:

„Mince je v nádobě s lichým číslem.“
„Mince je v nádobě s číslem větším než 3.“
„Mince je v nádobě s číslem menším než 4.“

Pravdomluvný hlídač s bezchybným úsudkem dodává:

„Jeden z nápisů není pravdivý, zbylé dva pravdivé jsou. Přestože vím, který nápis pravdivý není, neumím určit, ve které nádobě je mince.“

Rozhodněte, který z nápisů není pravdivý. *(K. Pazourek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V tajemné hale jsou modré, zelené a červené dveře. Pouze dvoje z těchto dveří vedou ven, za třetími se skrývá hladový tygr. Na dveřích jsou následující nápisy:

Modré: „Tygr není za těmito dveřmi.“

Zelené: „Tygr není za modrými dveřmi.“

Červené: „Tygr není za těmito dveřmi.“

Strážný chtěl být nápomocný a po pravdě prozradil, že dva nápisy jsou pravdivé a jeden je nepravdivý. Za kterými dveřmi se skrývá tygr?

[Nápisy na modrých a zelených dveřích jsou buď oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. Dva ze tří nápisů jsou pravdivé (modré a zelené dveře) a jeden nepravdivý (červené dveře). Tygr je za červenými dveřmi.]

N2. Jarce bylo více než 10 a méně než 15 let. Když se jí někdo zeptal na její věk, odpovídala v hádankách. Jednou řekla: „Můj věk je dělitelný třemi, není prvočíselný a není sudý.“ Jedna z těchto informací nebyla pravdivá, zbylé dvě byly pravdivé. Kolik let bylo Jarce?

[Mezi čísly 11, 12, 13, 14 má jedině číslo 12 dvě ze tří uvedených vlastností (ostatní mají jednu). Jarce bylo 12 let.]

N3. V osadě žili mafiáni a normální lidé. Mafiáni měli ve zvyku vždy lhát, normální lidé vždy mluvili pravdu. Při návštěvě této osady potkal turista tři místní, Adama, Bořka a Cyrila. Zeptal se Adama, zda je mafián, ale ten jen něco zabrblal pod vousy, nebylo mu vůbec rozumět. Bořek řekl: „Adam povídal, že je mafián“. Na to Cyril dodal: „Bořkovi se nedá věřit, vždyť je to sám mafián!“ Je Adam mafián, nebo není?

[Nikdo o sobě neřekne, že je mafián (pravdomluvný by lhal, lhář by mluvil pravdu). Tedy Bořek lhal a Cyril mluvil pravdu. O Adamovi nelze z uvedeného rozhodnout.]

D1. V kouzelné zahradě žije Alenka spolu se psem, kočkou a kozou. Jednou Alenka upekla dort, dala ho na zahradu vychladnout, ale když se vrátila, byl dort sněden. Alenka začala situaci vyšetřovat a každé ze zvířat jí řeklo své:

Pes: „Já jsem jediným pánem celé zahrady a dort jsem nesnědl.“

Kočka: „Já jsem jediným pánem celé zahrady a pes dort nesnědl.“

Koza: „Já jsem dort nesnědla, snědl ho pes.“

Alenka věděla, že každé ze zvířat mělo alespoň částečně pravdu. Kdo tedy snědl dort?

[Kdyby dort snědla koza, pak by obě části jejího tvrzení byly nepravdivé. Kdyby dort snědl pes, pak by obě části buď jeho, nebo koččina tvrzení byly nepravdivé. Dort snědla kočka (současně byla jediným pánem zahrady a všichni měli alespoň částečně pravdu).]

Z7–I–5

Je dán trojúhelník ABC s délkami stran $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$ *a* $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$. *Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně AC a která se dotýká stran AB a BC.* *(K. Pazourek)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Sestrojte kružnici opsanou a kružnici vepsanou čtverci se stranou délky 5 cm.

[Středy obou kružnic splývají se středem čtverce. Kružnice opsaná je určena libovolným vrcholem čtverce, kružnice vepsaná středem libovolné strany.]

N2. K trojúhelníku ze zadání soutěžní úlohy sestrojte kružnici opsanou a kružnici vepsanou.

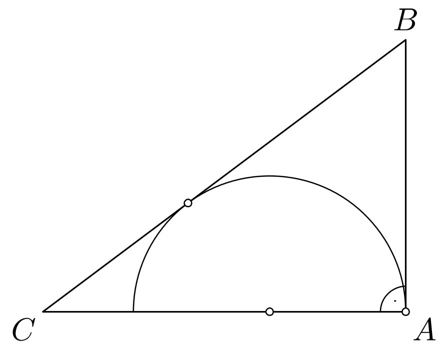
[Kružnice opsaná má střed v průsečíku os stran trojúhelníku, její poloměr je určen libovolným vrcholem. Kružnice vepsaná má střed v průsečíku os úhlů trojúhelníku, její poloměr je určen patou kolmice z tohoto bodu na libovolnou stranu.]

N3. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně AC a která se dotýká stran AB a BC.

[Střed půlkružnice je středem strany AB, její poloměr je určen patou kolmice z tohoto bodu na stranu AC či BC.]

D1. V trojúhelníku ABC se stranami $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 10\,\mathrm{cm}$ se má sestrojit půlkružnice, jejíž krajní body jsou vnitřními body strany AC a která se dotýká zbylých dvou stran. Udejte příklady trojúhelníků ABC, po než úloha nemá řešení.

[Příkladem může být trojúhelník s třetí stranou $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$. Trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A, což by byl krajní a současně dotykový bod půlkružnice, viz obrázek. Protože tento bod není vnitřním bodem strany AC, nejedná se o vyhovující řešení. Úloha nemá řešení také pro $|AC| < 8\,\mathrm{cm}$, tj. pro trojúhelníky s tupým úhlem u vrcholu A.]



Z7–I–6

Káťa a Škubánek smaží každý na své pánvičce jednu palačinku za druhou. Oba začali smažit současně, Kátě trvá každá palačinka tři minuty, Škubánkovi trvá každá palačinka čtyři minuty. Každých pět minut od začátku smažení se objeví mlsný kocour Luciáš. Pokud se Káťa i Škubánek věnují smažení, tak jim jednu hotovou palačinku ukradne, pokud zrovna přendávají palačinku z pánvičky na talíř, tak se schová a palačinky nechá být.

Kolik palačinek musí Káťa se Škubánkem usmažit, aby jim zbylo 150? Jak dlouho jim to bude trvat? *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Při výletu na jezeře Jindra pravidelně střídal veslování s odpočinkem. Vždy 2 minuty vesloval, přičemž uplul 60 metrů, a následně minutu odpočíval, přičemž ho vítr vrátil o 4 metry zpět. Za jak dlouho takto dovesloval na konec jezera vzdálený 225 metrů?

[Popsaným způsobem za 3 minuty urazí 56 m, tedy za 9 minut urazí 168 m. Do 225 m chybí 57 m, a tuto vzdálenost dovesluje za 114 vteřin. Na konec jezera se Jindra dostane za 10 minut a 54 vteřin.]

N2. Ája koupila pytel granulí pro své dva pejsky, Štaflíka a Špagetku. Granule dává pejskům do stejných misek a zakoupený pytel vystačí na 50 takových misek. Štaflík sní 3 misky granulí za dva dny, Špagetka sní 4 misky za tři dny. Jak dlouho jim granule vydrží?

[Za šest dní sní dohromady $9 + 8 = 17$ misek granulí, tedy za 18 dní sní 51 misek. Na jeden vychází $\frac{17}{6} \doteq 2{,}8$ misky, tedy balení vystačí na 17 dnů.]

N3. Uvažte zadání soutěžní bez Škubánka, tedy jen Káťa smaží a Luciáš krade. Kolik palačinek musí Káťa usmažit, aby jich zbylo 20, a jak dlouho jí to bude trvat?

[Za 15 minut Káťa usmaží 5 palačinek, z nichž 2 ukradne Luciáš. Za 90 minut usmaží 30 palačinek, Luciáš jich ukradne 12, zbude 18. Za dalších 9 minut usmaží 3 palačinky, Luciáš ukradne 1 a bude jich mít celkem 20. Káťa musí usmažit 33 palačinek, bude jí to trvat 99 minut.]

D1. Na stadionu běhají Andrea, Bětka a Cilka. Andrea je nejrychlejší a jeden okruh uběhne za 3 minuty, Bětce jeden okruh trvá 4 minuty a Cilce 5 minut. David dívky vyfotil při startu a pak pokaždé, když se na startovní čáře potkaly všechny tři. Pokaždé, když se na startovní čáře potkaly dvě z dívek, vyfotil si je Emil. Kolik okruhů uběhla Bětka ve chvíli, kdy chlapci dohromady nafotili 12 fotografií?

[Emil fotil Andreu a Bětku každých 12 minut, Andreu a Cilku každých 15 minut, Bětku a Cilku každých 20 minut, David fotil děvčata každých 60 minut. Za 60 minut pořídili dohromady 11 fotografií, dvanáct jich měli za 72 minut. Za tu dobu Bětka oběhla 18 okruhů.]