67. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Šárka a Terezka dostaly bonboniéru, ve které bylo 35 čokoládových bonbónů. Každý den snědlo každé z děvčat alespoň jeden bonbón a žádný bonbón nebyl dělen na části. První den snědla Terezka $\frac{2}{5}$ toho, co snědla tentýž den Šárka. Druhý den snědla Šárka $\frac{3}{4}$ toho, co snědla tentýž den Terezka. Na konci druhého dne byla bonboniéra prázdná.

Kolik bonbónů celkem snědla Terezka, když víme, že rozdíl mezi počtem bonbónů snědených Terezkou a počtem bonbónů snědených Šárkou byl nejmenší možný?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. První den Terezka snědla $\frac{2}{5}$ toho, co snědla Šárka. Počet bonbónů snědených ten den Šárkou proto musel být dělitelný 5. Druhý den snědla Šárka $\frac{3}{4}$ toho, co snědla Terezka. Počet bonbónů snědených ten den Terezkou proto musel být dělitelný 4. Počty bonbónů snědených děvčaty v jednotlivé dny uvádíme v následující tabulce, kde x a y značí neznámá přirozená čísla:

	1. den	2. den
Šárka	$5x$	$3y$
Terezka	$2x$	$4y$

Celkem se za oba dny snědlo 35 bonbónů, tedy

$$7x + 7y = 35 \quad \text{neboli} \quad x + y = 5. \tag{1}$$

Rozdíl mezi počtem bonbónů snědených Terezkou a počtem bonbónů snědených Šárkou je

$$(2x + 4y) - (5x + 3y) = y - 3x. \tag{2}$$

Pokud z (1) vyjádříme $y = 5 - x$ a dosadíme do (2), dostaneme rozdíl $5 - 4x$. Tento rozdíl je nejmenší možný, právě když $x = 1$. Odtud vyplývá, že $y = 4$ a že Terezka celkem snědla $2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 18$ bonbónů.

Poznámka. Dvojice přirozených čísel (x, y) vyhovující rovnici (1) jsou čtyři:

$$(1, 4), \quad (2, 3), \quad (3, 2), \quad (4, 1).$$

Dosazením každé z těchto dvojic do úvodní tabulky dostaneme konkrétní hodnoty, mezi kterými lze vybrat tu s nejmenším rozdílem mezi počty bonbónů snědených Terezkou a Šárkou. Toto řešení odpovídá první uvedené dvojici:

	1. den	2. den	celkem
Šárka	5	12	17
Terezka	2	16	18

Jiné řešení. Protože celkový počet bonbónů byl 35, což je liché číslo, nejmenší možný rozdíl mezi bonbóny snědenými Šárkou a Terezkou by mohl být 1. V takovém případě by buď Šárka snědla 18 bonbónů a Terezka 17, nebo naopak. Při stejném značení jako v úvodu předchozího řešení by první možnost vedla k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 18, \\ 2x + 4y &= 17. \end{aligned}$$

Po úpravách dostáváme řešení $x = \frac{3}{2}$ a $y = \frac{7}{2}$, které však není vyhovující, protože není celočíselné. Druhá zmiňovaná možnost by vedla k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 17, \\ 2x + 4y &= 18, \end{aligned}$$

která po úpravách dává řešení $x = 1$ a $y = 4$. Terezka celkem snědla 18 bonbónů.

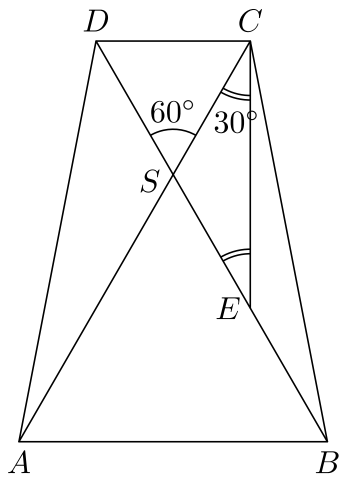
Hodnocení. 2 body za vztahy mezi snědenými bonbóny v jednotlivých dnech (např. jako v úvodní tabulce); 2 body za sestavení rovnic; 2 body za dořešení a kvalitu komentáře.

Z9–II–2

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou strany AB a CD rovnoběžné, přičemž strana AB je dvakrát delší než strana CD. Bod S je průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ a trojúhelníky ABS a CDS jsou oba rovnostranné. Bod E je takový bod úsečky BS, že velikost úhlu ACE je $30°$.

Určete poměr obsahů čtyřúhelníku $ABCD$ a trojúhelníku EBC. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Ze zadání víme, že (1) trojúhelníky ABS a CDS jsou rovnostranné a (2) délky jejich stran jsou v poměru 2 : 1. Z prvního poznatku plyne, že všechny vnitřní úhly v těchto trojúhelnících mají velikost $60°$. Proto je velikost úhlu ESC rovna $180° - 60° = 120°$. Protože velikost úhlu SCE je $30°$, na velikost úhlu SEC v trojúhelníku SEC zbývá také $30°$. Trojúhelník SEC je tedy rovnoramenný se základnou EC, a proto jsou úsečky SE a SC shodné. Z druhého poznatku plyne, že úsečka SB má dvojnásobnou délku ve srovnání s úsečkou SC. Celkem tedy zjišťujeme, že bod E leží v polovině úsečky SB, resp. úsečka DB je body S a E rozdělena na třetiny.



Trojúhelníky DBC a EBC mají společný vrchol C a délky jemu protilehlých stran DB a EB jsou v poměru 3 : 1. Ve stejném poměru jsou proto i jejich obsahy,

$$S_{DBC} : S_{EBC} = 3 : 1.$$

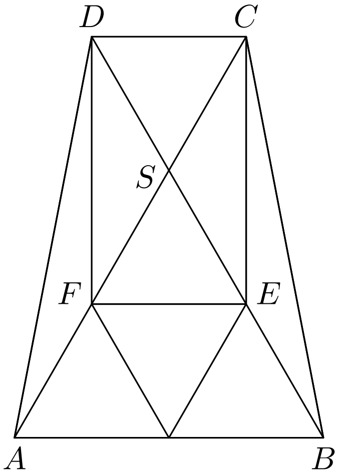
Lichoběžník $ABCD$ je úhlopříčkou DB rozdělen na dva trojúhelníky DBA a DBC, které mají společnou výšku s lichoběžníkem a délky příslušných stran AB a CD jsou v poměru 2 : 1. Ve stejném poměru jsou proto i obsahy těchto trojúhelníků, tzn.

$$S_{ABCD} : S_{DCB} = 3 : 1.$$

Celkem tedy zjišťujeme, že hledaný poměr obsahů je

$$S_{ABCD} : S_{ECB} = 9 : 1.$$

Poznámka. Trojúhelníky ABS a CDS jsou podobné s koeficientem podobnosti 2 : 1, jejich obsahy jsou proto v poměru 4 : 1. Názorně lze tento poměr ukázat rozdělením trojúhelníku ASB pomocí středních příček na čtyři trojúhelníky shodné s CDS, viz obrázek. Doplněním úsečky DF je lichoběžník $ABCD$ rozdělen na devět trojúhelníků majících stejný obsah jako trojúhelník EBC.



Hodnocení. 3 body za určení, že bod E je v polovině úsečky SB; po 1 bodu za každý ze zvýrazněných poměrů (nebo odpovídající dílčí kroky při jiném řešení).

Z9–II–3

Čtyři kamarádky našly v učebnici následující poznámku:

$$\textit{Víme, že } \sqrt{a \cdot b} = 99\sqrt{2} \textit{ a že } \sqrt{a \cdot b \cdot c} \textit{ je přirozené číslo.}$$

Nyní přemýšlí a dohadují se, co mohou říci o čísle c:

Anna: „Určitě to nemůže být $\sqrt{2}$.“

Dana: „Může to být např. 98.“
Hana: „Může to být jakékoli sudé číslo.“
Jana: „Takové číslo je určitě jenom jedno.“

Rozhodněte, která (které) z dívek má (mají) pravdu, a vysvětlete proč.

(*E. Semerádová*)

Možné řešení. Zmiňovaný výraz můžeme vyjádřit jako

$$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = \sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt{c} = 99\sqrt{2} \cdot \sqrt{c}. \tag{1}$$

Pro $c = \sqrt{2}$ je

$$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = 99\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}},$$

což není přirozené číslo. Anna tedy má pravdu.

Pro $c = 98$ je

$$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = 99\sqrt{2} \cdot \sqrt{98} = 99\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7} = 99 \cdot 2 \cdot 7,$$

což je přirozené číslo. Dana tedy má pravdu.

Např. pro $c = 4$ je

$$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = 99\sqrt{2} \cdot 2,$$

což není přirozené číslo. Hana tedy nemá pravdu.

Pro $c = 98$ jsme již ukázali, že $\sqrt{a \cdot b \cdot c}$ je přirozené číslo. Dále např. pro $c = 2$ je

$$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = 99\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 99 \cdot 2,$$

což je přirozené číslo. Jana tedy nemá pravdu.

Jiné řešení. Aby výraz (1) představoval přirozené číslo, muselo by být

$$\sqrt{c} = \sqrt{2} \cdot k \quad \text{neboli} \quad c = 2 \cdot k^2, \tag{2}$$

pro nějaké přirozené číslo k.

Protože $c = \sqrt{2}$ není tvaru (2), Anna má pravdu.

Protože $c = 98 = 2 \cdot 7^2$ je tvaru (2), Dana má pravdu.

Protože ne každé sudé číslo je tvaru (2), Hana nemá pravdu.

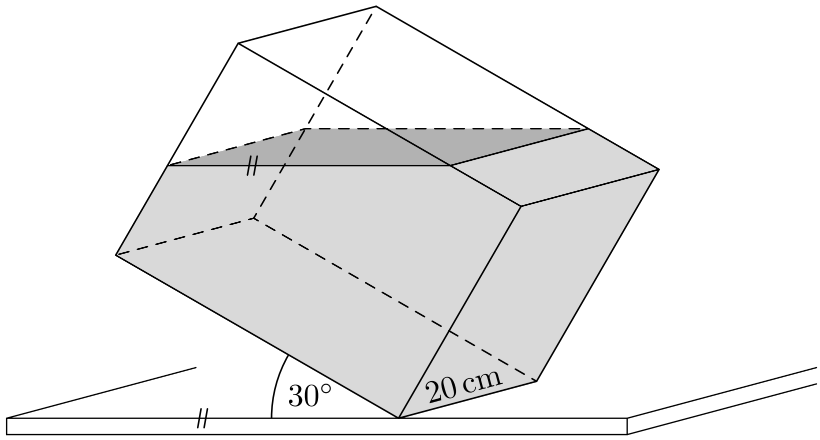
Protože čísel tvaru (2) je nekonečně mnoho, Jana nemá pravdu.

Hodnocení. Po 1 bodu za zhodnocení výroků Anny a Dany; po 2 bodech za zhodnocení výroků Hany a Jany. Odpovědi bez zdůvodnění nehodnoťte, i kdyby byly správné.

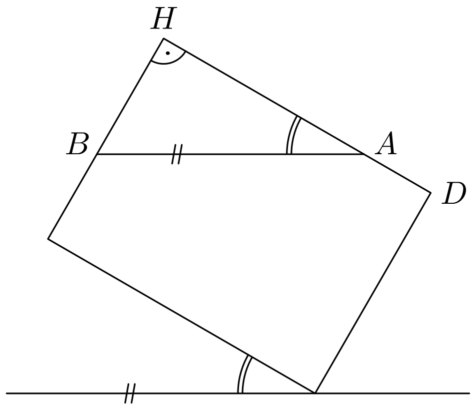
Z9–II–4

Kvádr o rozměrech $20\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm} \times 40\,\mathrm{cm}$ je položen tak, že hrana délky $20\,\mathrm{cm}$ leží na stole a hrana délky $40\,\mathrm{cm}$ svírá se stolem úhel $30°$. Kvádr je částečně naplněn vodou, která smáčí horní stěnu o rozměrech $20\,\mathrm{cm} \times 40\,\mathrm{cm}$ z jedné čtvrtiny.

Určete objem vody v kvádru. (*M. Krejčová*)



Možné řešení. Objem vody v kvádru lze určit jako rozdíl objemu kvádru a objemu jeho prázdné části. Objem kvádru je $2 \cdot 3 \cdot 4\,\mathrm{dm}^3$, tj. 24 litrů. Prázdná část kvádru tvoří trojboký hranol, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník a jehož výška měří $2\,\mathrm{dm}$. Stačí určit obsah pravoúhlého trojúhelníku ABH:



Horní stěnu kvádru smáčí voda z jedné čtvrtiny. To znamená, že hrana DH délky $4\,\mathrm{dm}$ je rozdělena vodní hladinou v bodě A vzdáleném $1\,\mathrm{dm}$ od bodu D neboli $3\,\mathrm{dm}$ od bodu H. Vodní hladina je rovnoběžná s rovinou stolu a protilehlé hrany kvádru jsou navzájem rovnoběžné, proto má úhel BAH velikost $30°$. Pravý úhel je u vrcholu H, na zbylý úhel u vrcholu B tak zbývá $60°$.

Trojúhelník ABH můžeme chápat jako polovinu rovnostranného trojúhelníku rozděleného výškou AH. Délka strany BH je proto poloviční vzhledem k délce AB. Pokud velikost strany BH v dm označíme x, potom podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABH platí

$$3^2 + x^2 = (2x)^2.$$

Odtud plyne $3x^2 = 9$ neboli $x = \sqrt{3}$. Obsah pravoúhlého trojúhelníku ABH je tedy roven $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{dm}^2$.

Objem trojbokého hranolu představujícího prázdnou část kvádru je $2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^3$, což je přibližně 5,2 litrů. Objem vody v kvádru je $24 - 3\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^3$, což je přibližně 18,8 litrů.

Hodnocení. 2 body za úvodní úvahu a délku úsečky AH, resp. AD; 3 body za délku úsečky BH a obsah trojúhelníku ABH; 1 body za dopočítání a případné zaokrouhlení.