Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Označme P hledaný mnohočlen. Výsledky jeho dělení oběma danými mnohočleny znamenají, že pro vhodné mnohočleny A a B platí rovnosti

$$P(x) = A(x)(x^2 - 4) + 1 \quad \text{a} \quad P(x) = B(x)(x^3 - 8x + 8) + 1.$$

Přitom A a B nejsou nulové mnohočleny, neboť P musí mít podle zadání kladný stupeň, který je tak aspoň 3.

Porovnáním pravých stran dostaneme rovnost mnohočlenů

$$A(x)(x^2 - 4) = B(x)(x^3 - 8x + 8).$$

Mezi kořeny mnohočlenu na levé straně jistě patří čísla $x = 2$ a $x = -2$, z nichž pouze první je kořenem kubického činitele $x^3 - 8x + 8$ na pravé straně (to snadno zjistíme dosazením). Proto $x = -2$ musí být kořenem mnohočlenu B, který tak má stupeň aspoň jedna, tudíž hledaný mnohočlen P má stupeň aspoň 4. Navíc P bude mít stupeň čtyři, právě když odpovídající B bude tvaru $B(x) = a(x + 2)$ pro vhodné číslo $a \neq 0$. (Odpovídající $A(x) = a(x^3 - 8x + 8)/(x - 2)$ není nutné počítat, přesto je uveďme: $A(x) = a(x^2 + 2x - 4)$.)

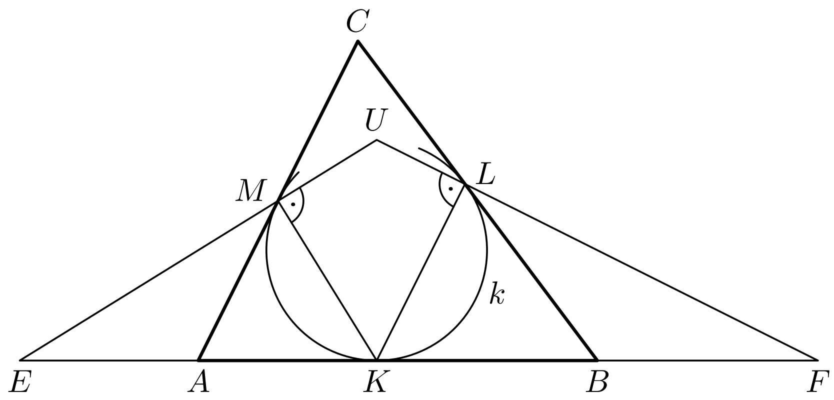
Všechny mnohočleny P vyhovující podmínkám úlohy tak jsou tvaru

$$P(x) = \underbrace{a(x + 2)}_{B(x)}(x^3 - 8x + 8) + 1 = a(x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16) + 1.$$

(Zkouška při uvedeném postupu není nutná, pro úplné řešení stačilo uvést jeden příklad, třeba volbou $a = 1$.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vytvoření potřebné rovnosti udělte 2 body. Za důkaz, že hledaný mnohočlen má stupeň aspoň 4, udělte 3 body. Za dokončení řešení dejte 1 bod.

2. Z rovnosti příslušných úseků tečen ke kružnici k plyne $|AM| = |AK|$ a $|BL| = |BK|$, proto $|AM| = |AK| = |AE|$ a $|BL| = |BK| = |BF|$ (obr. 1). To ovšem znamená, že bod A je středem kružnice opsané trojúhelníku EKM a podobně bod B středem kružnice opsané trojúhelníku KFL.



Obr. 1

Podle Thaletovy věty odtud plyne, že trojúhelníky EKM a KFL jsou oba pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech M a L. Je tudíž

$$|\sphericalangle KMU| + |\sphericalangle KLU| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

což znamená, že $MKLU$ je tětivový čtyřúhelník. Bod U tedy leží na kružnici k opsané trojúhelníku MKL.

Navíc je úsečka UK průměrem kružnice k, a protože strana AB se jí v bodě K dotýká, je průměr UK kolmý na AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz, že úhly EKM a KFL jsou pravé, dejte 3 body a další bod za odvození, že bod U leží na kružnici k. Za důkaz, že přímky UK a AB jsou navzájem kolmé, udělte 2 body.

3. Pro každé přirozené číslo n platí $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Jelikož součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný šesti, je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti pro každé přirozené číslo n.

Je-li číslo 2 018 vyjádřeno jako součet několika přirozených čísel,

$$2\,018 = x_1 + \ldots + x_k,$$

můžeme pro odpovídající součet T třetích mocnin psát

$$\begin{aligned} T &= x_1^3 + \ldots + x_k^3 = \\ &= (x_1^3 - x_1) + \ldots + (x_k^3 - x_k) + (x_1 + \ldots + x_k) = \\ &= (x_1^3 - x_1) + \ldots + (x_k^3 - x_k) + 2\,018 = \\ &= 6t + 6 \cdot 336 + 2, \end{aligned}$$

takže číslo T dává bez ohledu na způsob rozkladu čísla 2 018 při dělení šesti vždy zbytek 2.

Poznámka. Řešení lze podat stručněji, ovládáme-li základy číselných kongruencí. Víme pak, že tvrzení o stejném zbytku čísel n^3 a n při dělení šesti lze dokázat pro obecné n tak, že je numericky ověříme pouze pro $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Poté už je jasné, že i čísla

$$2\,018 = x_1 + \ldots + x_k \quad \text{a} \quad x_1^3 + \ldots + x_k^3$$

dávají při dělení šesti stejný zbytek. A číslo 2 018 dává při dělení šesti zbytek 2.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za jakékoli zdůvodnění, že přirozené číslo a jeho třetí mocnina dávají při dělení šesti stejný zbytek, udělte 2 body. Za zdůvodnění, že čísla $x_1 + \ldots + x_k$ a $x_1^3 + \ldots + x_k^3$ dávají při dělení šesti stejný zbytek, udělte další 2 body. Za dokončení řešení udělte zbylé 2 body.