# I. kolo kategorie Z5

**Z5–I–1**

V naší ulici bydlí Čapkovi a Němcovi. Čapkovi mají dva syny, Karlíka a o dva roky staršího Pepíka. Němcovi mají dceru Bóžu. Narozeniny všech tří dětí slavívají obě rodiny společně, a to v den Karlíkových narozenin. Při letošní oslavě byla Bóža třikrát starší než Karlík. Za tři roky bude Karlíkovi a Pepíkovi dohromady stejně jako bude Bóže.

Kolik let bylo dětem při letošní oslavě? (*M. Petrová*)

**Možné řešení.** Za tři roky bude součet věků Karlíka a Pepíka o šest let větší než nyní, zatímco věk Bóži se zvětší o tři roky. Protože tyto hodnoty mají souhlasit, je nynější věk Bóži o tři roky větší než součet věků obou chlapců.

Pepík je o dva roky starší než Karlík, tedy součet jejich věků je stejný jako dvojnásobek věku Karlíka a dva roky. Celkem máme věk Bóži vyjádřen jako dvojnásobek věku Karlíka a pět roků.

Ze zadání také víme, že Bóža je třikrát starší než Karlík. Porovnáním těchto dvou vyjádření dostáváme, že Karlíkovi je pět roků, a tedy Pepíkovi je sedm a Bóže patnáct.

**Poznámka.** Myšlenky prvních dvou odstavců lze zkráceně psát takto:

$$B = K + P + 3, \quad P = K + 2 \implies B = 2K + 5.$$

Porovnáním dvojího vyjádření věku Bóži dostáváme:

$$2K + 5 = 3K \implies K = 5.$$

Odtud pak plyne, že $P = 7$ a $B = 15$. Situaci je také možné (a vhodné) znázornit pomocí skládání úseček.

**Jiné řešení.** Se stejným značením jako v předchozí poznámce lze postupně vzhledem k věku Karlíka vyjadřovat věky ostatních a kontrolovat podmínku s rovností věků po třech letech:

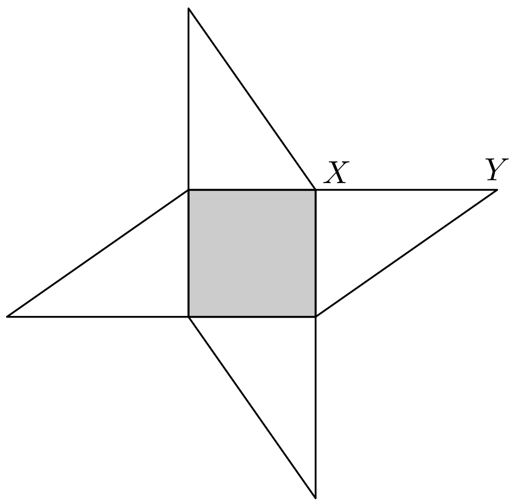
| $K$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P = K + 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
| $K + 3 + P + 3$ | 10 | 12 | 14 | 16 | **18** | … |
| $B = 3K$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | … |
| $B + 3$ | 6 | 9 | 12 | 15 | **18** | … |

Vyhovující řešení dostáváme pro $K = 5$, $P = 7$ a $B = 15$. Karlíkovi je pět roků, Pepíkovi sedm a Bóže patnáct.

**Z5–I–2**

Na obrázku je šedý čtverec se stranou délky 10 cm. Čtverec doplňují čtyři stejné pravoúhlé trojúhelníky do tvaru hvězdy. Součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce.

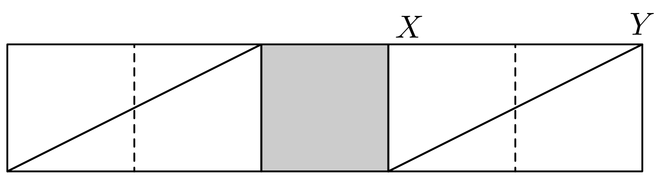
Určete délku strany $XY$. (*E. Semerádová*)



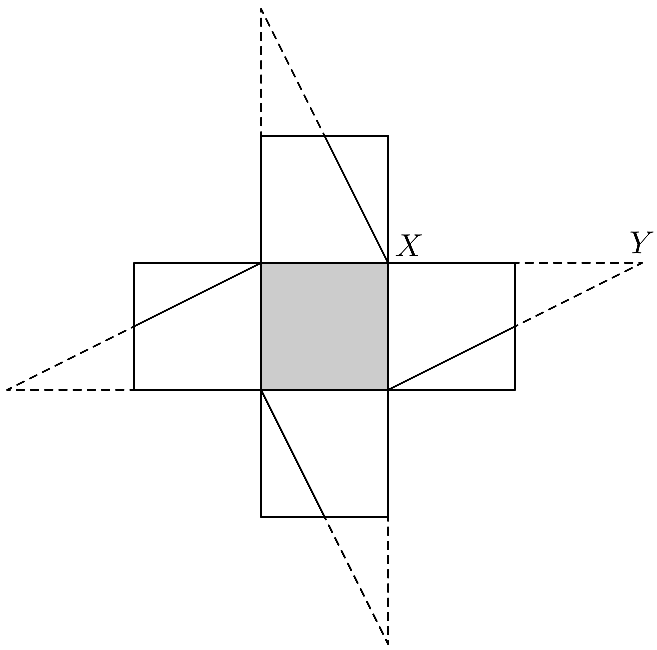

Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

**Možné řešení.** Z každých dvou bílých trojúhelníků lze složit obdélník, jehož jedna strana se shoduje se stranou šedého čtverce. Ze čtyř trojúhelníků lze složit dva obdélníky.

Součet obsahů dvou obdélníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce, právě když druhá strana obdélníku je dvojnásobkem strany čtverce. Tedy strana $XY$ měří 20 cm.




**Poznámka.** Bílé trojúhelníky jsou všechny stejné, tedy každý z nich má stejný obsah jako šedý čtverec. Z každého trojúhelníku lze vytvořit čtverec ustřižením a přesunutím jeho části (v souladu s předchozím obrázkem) takto:




**Z5–I–3**

V následujícím příkladu je pětkrát použito znaménko + a výsledek je násobkem tří:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39.$$

Změňte dvě ze znamének + na znaménko − tak, aby výsledek nového příkladu byl opět násobkem tří. Najděte všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

**Možné řešení.** Jak původní, tak nový výsledek je násobkem tří. Tedy také součet odčítaných čísel musí být násobkem tří. Takové součty pro dvojice čísel od 4 do 8 jsou:

$$4 + 5 = 9, \quad 4 + 8 = 12, \quad 5 + 7 = 12, \quad 7 + 8 = 15.$$

Všechny možné záměny znamének (a odpovídající výsledky) jsou:

$$\begin{aligned} 9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 &= 21,\\ 9 - 8 + 7 + 6 + 5 - 4 &= 15,\\ 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 &= 15,\\ 9 - 8 - 7 + 6 + 5 + 4 &= 9. \end{aligned}$$

**Poznámka.** Počet možných záměn dvou znamének z pěti je deset. Bez úvodního postřehu lze postupovat tak, že se vypočte deset odpovídajících příkladů a vyberou se ty, jejichž výsledek je násobkem tří.

**Z5–I–4**

Pinocchio tvrdí, že číslo dne v datu jeho narození lze beze zbytku dělit třemi, čtyřmi, pěti a šesti. Tři z těchto čtyř informací jsou pravdivé, jedna je nepravdivá.

Kolikátý den v měsíci může mít Pinocchio narozeniny? Určete všechny možnosti.

(*E. Novotná*)

**Možné řešení.** Postupně vylučujeme jednoho ze čtyř dělitelů a hledáme nejmenší čísla, která jsou beze zbytku dělitelná zbylými třemi čísly. Mezi nimi vybíráme ta, která nejsou dělitelná vyloučeným číslem (nevyhovující možnosti jsou v následující tabulce přeškrtnuty). Výsledek má představovat den v měsíci, tedy nás zajímají hodnoty nepřevyšující 31 (vyhovující možnosti jsou zvýrazněny tučně). Závěry jsou shrnuty zde:

| ne | ano | možnosti |
|---|---|---|
| 3 | 4, 5, 6 | ~~60~~, ... |
| 4 | 3, 5, 6 | **30**, ~~60~~, ... |
| 5 | 3, 4, 6 | **12**, **24**, 36, ... |
| 6 | 3, 4, 5 | ~~60~~, ... |

Pinocchio se mohl narodit 12., 24., nebo 30. dne v měsíci.

**Jiné řešení.** Po řádcích vypíšeme všechna čísla nepřevyšující 31, která jsou beze zbytku dělitelná třemi, čtyřmi, pěti a šesti:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | 6 | | 9 | | **12** | 15 | | 18 | | 21 | **24** | | 27 | | **30** |
| | 4 | | | 8 | | | **12** | | 16 | | 20 | | **24** | | | 28 | |
| | | 5 | | | | 10 | | 15 | | | 20 | | | 25 | | | **30** |
| | | | 6 | | | | **12** | | | 18 | | | **24** | | | | **30** |

Čísla, která jsou dělitelná třemi ze čtyř uvedených dělitelů, jsou zvýrazněna tučně.

Pinocchio se mohl narodit 12., 24., nebo 30. dne v měsíci.

**Poznámky.** Pokud se Pinocchio narodil v únoru, pak poslední možnost (30.) odpadá.

U prvního uvedeného řešení lze možné hodnoty ve třetím sloupci tabulky určovat např. tak, že postupně pro násobky největšího z daných čísel ověřujeme, zda jsou beze zbytku dělitelné zbylými dvěma čísly. Nejmenší z uvedených hodnot je tzv. *nejmenší společný násobek* čísel.

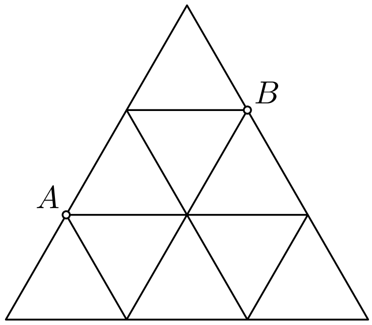
Úlohu lze řešit také tak, že se postupně pro čísla od 1 do 31 určí všichni dělitelé, kterými lze beze zbytku dělit, a mezi nimi se hledají tři ze čtyř daných dělitelů.

**Z5–I–5**

V síti stezek vyznačených na obrázku má každá stezka mezi sousedními křižovatkami délku 1 km.

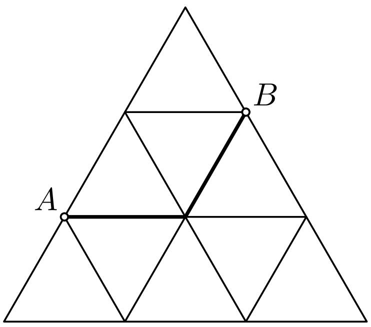
Kolik cest dlouhých nanejvýš 3 km vede po stezkách z místa $A$ do místa $B$?

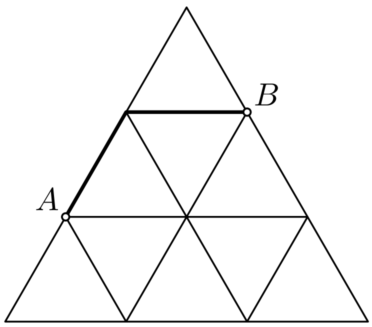
(*E. Semerádová*)



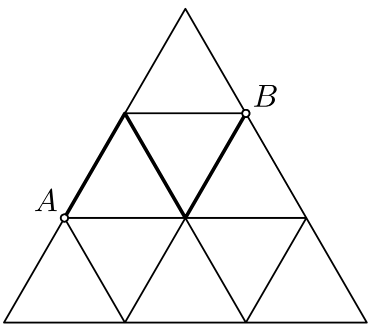

**Možné řešení.** Cesta délky 1 km není žádná.

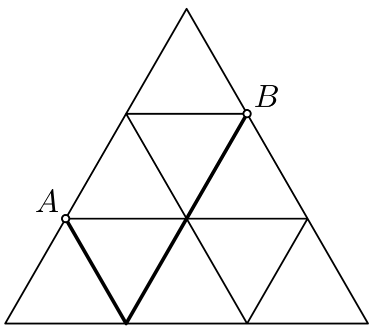
Cesty délky 2 km jsou dvě:

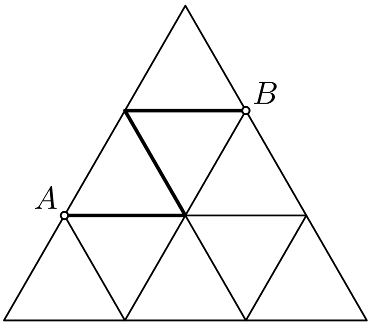


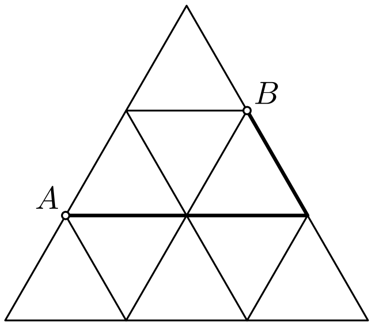



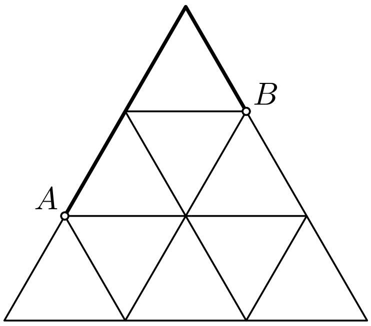

Cest délky 3 km je pět:






Mezi místy $A$ a $B$ je celkem sedm cest dlouhých nanejvýš 3 km.

**Poznámka.** Cesty délky 3 km jsou z předchozích cest odvozeny tak, že 1 km úseky byly systematicky nahrazovány dvěma 1 km úseky začínajícími a končícími ve stejných křižovatkách.

**Z5–I–6**

Andělka navléká na nit bez mezer za sebe korálky tří různých tvarů $A$, $B$, $C$. Postupuje tak, že tvary střídá ve stále stejném pořadí a postupně zvyšuje počty tvarů ve skupinách:

$$ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC\ldots$$

Korálek tvaru $A$ zabírá 5 mm nitě, korálek tvaru $B$ zabírá 4 mm, korálek tvaru $C$ zabírá 3 mm.

Kolik korálků potřebuje Andělka k výrobě náhrdelníku dlouhého alespoň 50 cm?

(*L. Dedková*)

**Možné řešení.** Skupina tří korálků $ABC$ zabírá 12 mm, skupina šesti korálků $AABBCC$ zabírá 24 mm, skupina devíti korálků $AAABBBCCC$ zabírá 36 mm atd.

| $ABC$ | $AABBCC$ | $AAABBBCCC$ | $AAAABBBBCCCC\ldots$ |
|---|---|---|---|
| 12 | 24 | 36 | 48 (mm) |

První skupina zabírá 12 mm nitě, první dvě skupiny zabírají 36 mm, první tři skupiny zabírají 72 mm atd. Vzhledem k počtu korálků každého tvaru ve skupině, vyjádříme délku skupiny, celkový počet korálků a celkovou délku dosud zabrané nitě:

| počet trojic ve skupině | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| délka skupiny (mm) | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 |
| celkový počet korálků | 3 | 9 | 18 | 30 | 45 | 63 | 84 | 108 | 135 |
| celková délka (mm) | 12 | 36 | 72 | 120 | 180 | 252 | 336 | 432 | 540 |

Délky 500 mm je dosaženo v rámci deváté skupiny. Poslední úplná skupina sestává z osmi korálků každého tvaru. Na konci této skupiny je celkem zabráno 432 mm nitě, zbývá 68 mm, dosud použitých korálků je 108.

Devět korálků tvaru $A$ zabírá 45 mm. S těmito korálky je celkem zabráno 477 mm nitě, zbývá 23 mm, dosud použitých korálků je 117.

Šest korálků tvaru $B$ zabírá 24 mm. S těmito korálky je celkem zabráno 501 mm nitě, dosud použitých korálků je 123.

Andělka potřebuje alespoň 123 korálků.

**Poznámka.** Postupné sčítání v předchozí tabulce lze nahradit dělením se zbytkem:

$$500 : 12 \text{ dává } 41 \text{ a zbytek } 8.$$

Tedy do 500 mm se může vlézt 41 trojic $ABC$ a zbude 8 mm. Je však nutné zohlednit výskyt ve skupinách. V celých skupinách umíme dostat $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$ trojic $ABC$ (s devátou skupinou bychom měli $36+9=45$, což je víc než 41). Těchto 36 trojic celkem zabírá 432 mm nitě ($36 \cdot 12 = 432$) a obsahuje 108 korálků ($36 \cdot 3 = 108$).