

Úlohy školního kola kategorie A

1. Řekneme, že trojice reálných čísel a, b, c je *dobrá*, pokud platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \quad \text{a} \quad a + b + c = 1.$$

- a) Najděte příklad dobré trojice.
b) Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b},$$

kde trojice a, b, c je dobrá.

2. Kladné celé číslo nazveme *mozaikové*, pokud má mezi čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 alespoň čtyři dělitele. Rozhodněte, zda lze z libovolných tří mozaikových čísel vybrat dvě, jejichž součet je mozaikový.
3. V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík úhlopříček. Dále označme H průsečík výšek trojúhelníku APB . Předpokládejme, že platí $|AP| + |PB| = |AD| + |BC|$. Dokažte, že $|HC| = |HD|$.

Školní kolo kategorie A se koná

v úterý 9. prosince 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.