

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Ivan, Jarek, Kája a Luboš mají dohromady 90 známek. Kdyby měl Ivan o dvě známky méně, Jarek o dvě více, Kája dvojnásobek a Luboš polovinu toho, co nyní, měli by všichni stejně.

Kolik známek má každý z chlapců?

(L. Hozová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Alice, Božena a Daniela sbírají mušle, dohromady jich mají 34. Kdyby měla Alice o dvě méně, Božena o tři více a Daniela o třetinu méně toho, co nyní, měly by všechny stejně. Kolik mušlí má každá z dívek?

[Vzhledem k počtu mušlí, které by měly, kdyby měly stejně, lze dopočítat nynější stavy a ověřit součet 34. Vyhovující řešení odpovídá počtu 10: Alice má 12, Božena 7 a Daniela 15 mušlí.]

N2. Při oslavě 39. narozenin paní Záhadové se jí kamarádka zeptala na věk jejích tří dětí. Paní Záhadová odpověděla: „Když sečtu věk nejstaršího s polovinou věku nejmladšího a čtvrtinou věku prostředního, dostanu třetinu věku svého.“ Kolik let mohlo být jejím dětem? Uveďte všechny možnosti.

[Věk nejmladšího dítěte byl sudý, věk prostředního byl násobkem čtyř a popsany součet byl 13. Možné věky dětí byly 2, 4, 11, nebo 2, 8, 10, nebo 4, 8, 9 let.]

N3. Sourozenci Adam a Eva chodí na základní školu, Adam je o dva roky mladší než Eva. Když k trojnásobku Evina věku přičetli 5 a výsledek vydělili věkem Adama, vyšlo jim stejné číslo jako počet babiččiných koček. Kolik koček měla babička?

[Počet babiččiných koček lze po úpravě vyjádřit jako $3 + \frac{11}{A}$, kde A značí věk Adama. Aby tento výsledek byl celočíselný a současně Adam mohl chodit na základní školu, musí být $A = 11$. Babička měla 4 kočky.]

D1. Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíce kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček. Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda?

[Řešení je vhodné provádět od konce, kdy měli všichni po 25 kuličkách. Před posledními výměnami měl Jarda 39, Přemek 18 a Robin 18 kuliček. Před prvními výměnami měl Jarda 12, Přemek 27 a Robin 36 kuliček. Jarda měl po hře 12 kuliček.*]

* Převzato ze 73. ročníku MO, úloha **Z6–I–1**.

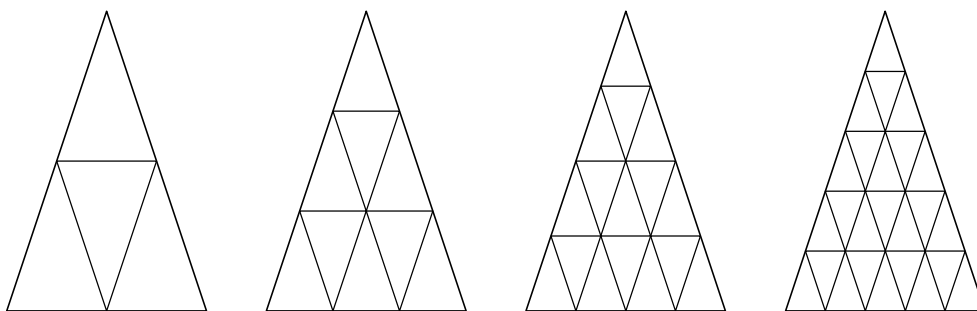
Z8–I–2

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 12 cm a výškou k základně velikosti 18 cm. Rozdělte trojúhelník na tři lichoběžníky o stejném obsahu. (L. Dedková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

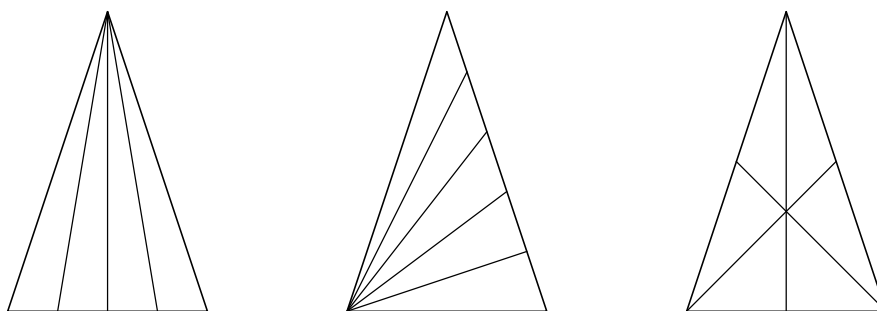
N1. Trojúhelník ze soutěžní úlohy rozdělte na čtyři shodné trojúhelníky. Zobecněte svoje řešení pro jiné počty trojúhelníků.

[Střední příčky rozdělují obecný trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Příčky protínající strany trojúhelníku ve třetinách, čtvrtinách, pětinach atd. jej rozdělují na 9, 16, 25 atd. shodných trojúhelníků.]



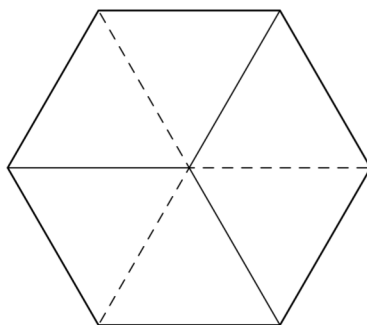
N2. Trojúhelník ze soutěžní úlohy rozdělte na čtyři trojúhelníky, které nejsou shodné, ale mají shodný obsah. Zobecněte svoje řešení pro jiné počty trojúhelníků.

[Rozdělením jakékoli strany na n stejných částí a spojením nově vzniklých bodů s protilehlým vrcholem trojúhelníku získáme dělení na n trojúhelníků se stejnými obsahy. Možností je však více, viz např. dělení na šest částí pomocí těžnic na posledním obrázku níže.]

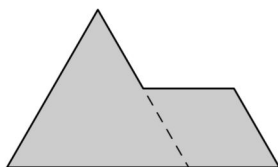


N3. Rozdělte pravidelný šestiúhelník na tři shodné kosočtverce.

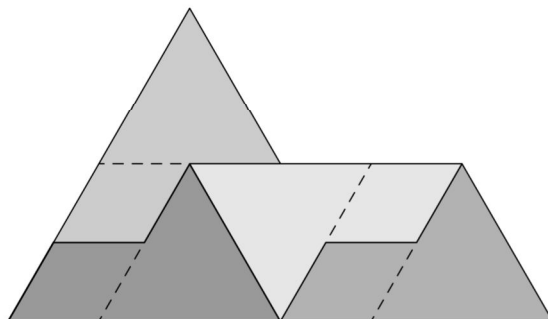
[Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků; každé dva sousední tvoří kosočtverec.]



- D1. Klára měla čtyři shodné dílky z tvrdého papíru, které jí připomínaly sfingu. Každý dílek byl slepen z rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 6 cm a kosočtverce se stranou délky 3 cm. Klára tyto čtyři dílky přikládala k sobě, až se jí povedlo složit podobný, ovšem větší tvar sfingy. Nakreslete, jak to mohla udělat. (Dílky se nepřekrývaly, nebyly nijak ohnuté, avšak mohly být překlopené spodní stěnou nahoru.)



[Strana kosočtverce je poloviční vzhledem ke straně trojúhelníku. Vnitřní úhly trojúhelníku jsou 60° , vnitřní úhly kosočtverce jsou 60° a 120° . Klára mohla dílky složit jako na obrázku níže.]



Z8–I–3

Pro čísla a , b , c , d platí:

- číslo a dává po dělení třemi zbytek 1,
- číslo b dává po dělení šesti zbytek 2,
- $a - b = d - c$,
- číslo d je dělitelné třemi.

Jaký zbytek po dělení devíti může dávat číslo c ? Najděte všechny možnosti.

(E. Semerádová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte všechna přirozená čísla menší než 30, která po dělení třemi dávají zbytek 2. Jaké zbytky dávají tato čísla po dělení šesti? A jaké po dělení devíti?

[Jedná se o čísla 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29. Po dělení šesti se pravidelně opakují zbytky 2, 5. Po dělení devíti se pravidelně opakují zbytky 2, 5, 8.]

N2. Jsou dána čísla $a = 2024$ a $b = 111$. Jaké zbytky po dělení třemi, čtyřmi a pěti dávají čísla a , b , jejich součet $a + b$ a rozdíl $a - b$?

[Čísla a , b , $a + b$, $a - b$ dávají postupně po dělení třemi zbytky 2, 0, 2, 2, po dělení čtyřmi zbytky 0, 3, 3, 1 a po dělení pěti zbytky 4, 1, 0, 3. K určení zbytků není nutné vyčíslovat $a + b$ a $a - b$, stačí znát zbytky pro a a b .]

N3. Moje oblíbené číslo je součtem čísla, které po dělení čtyřmi dává zbytek 1, a čísla, které po dělení osmi dává zbytek 3. Jaké zbytky mohou vyjít po dělení mého oblíbeného čísla osmi?

[Po dělení osmi dává první číslo zbytek 1, nebo 5, druhé číslo dává zbytek 3. Součet těchto čísel dává po dělení osmi zbytek 4, nebo 0.]

D1. Najděte všechna dvojmístná čísla, která jsou dělitelná čtyřmi, po dělení šesti dávají zbytek 2 a po dělení pěti dávají zbytek 3.

[Dvojmístných čísel, která po dělení šesti dávají zbytek 2, je patnáct: 14, 20, 26, ..., 86, 92, 98. Mezi těmito čísly je sedm dělitelných čtyřmi: 20, 32, 44, 56, 68, 80, 92. Mezi těmito čísly jedině 68 dává po dělení pěti zbytek 3.]

D2. Jaký zbytek po dělení třemi dává součet prvních 2024 přirozených čísel?

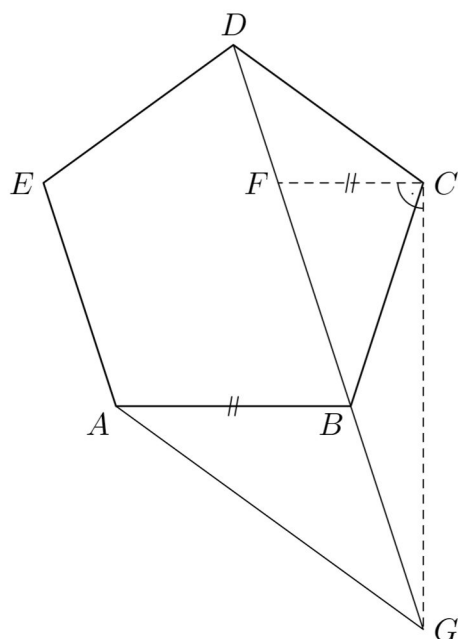
[Součet každé trojice po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi. Poslední úplná trojice mezi čísly od 1 do 2024 končí číslem 2022 (to je nejbližší menší číslo dělitelné třemi). Čísla 2023 a 2024 dávají po dělení třemi zbytky 1 a 2, tedy jejich součet je dělitelný třemi. Hledaný součet je dělitelný třemi.]

Z8–I–4

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem C protíná přímku BD v bodě F . Kolmice k přímce CF procházející bodem C protíná přímku BD v bodě G .

Určete velikost úhlu AGF .

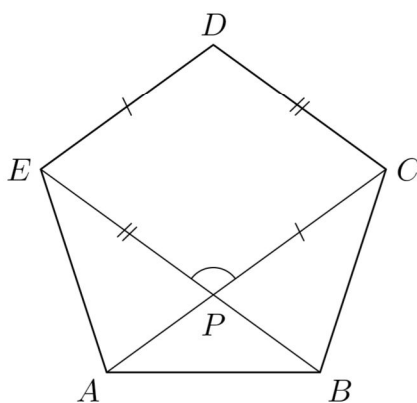
(P. Bak)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

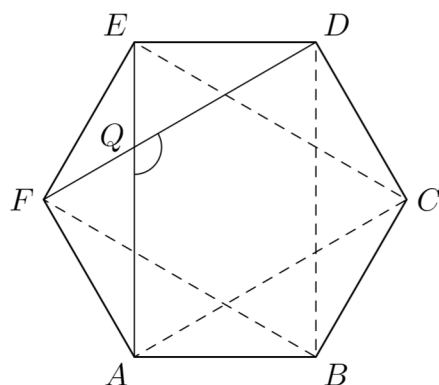
N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je bod P průsečíkem přímek AC a BE . Určete velikost úhlu EPC .

[Čtyřúhelník $EPCD$ je kosočtvercem. Úhel EPC je shodný s úhlem CDE , což je vnitřní úhel pětiúhelníku. Velikost úhlu EPC je 108° .]



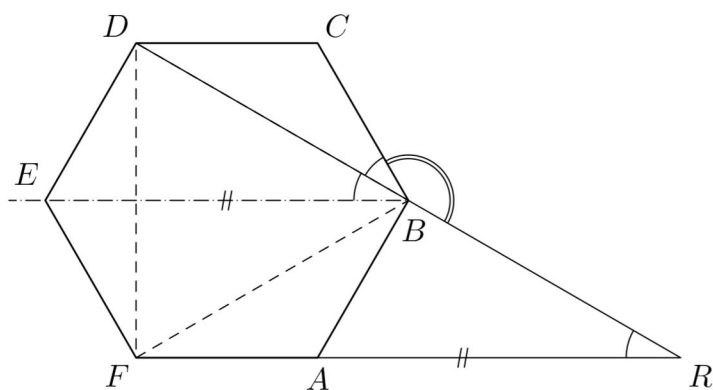
N2. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod Q průsečíkem přímek FD a AE . Určete velikost úhlu AQD .

[Úhlopříčky FD , AE a další čtyři shodné úhlopříčky vymezují pravidelný šestiúhelník uvnitř daného šestiúhelníku. Úhel AQD je vnitřním úhlem tohoto šestiúhelníku, jeho velikost je 120° .]



N3. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod R průsečíkem přímek FA a BD . Určete velikosti úhlů ARB a RBC .

[Přímka EB je osou souměrnosti jak daného šestiúhelníku, tak vepsaného rovnostranného trojúhelníku FBD . Proto platí $|\sphericalangle EBC| = 60^\circ$ a $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle CBD| = 30^\circ$. Přímky FA a EB jsou rovnoběžné, tedy (souhlasné) úhly ARB a EBD jsou shodné. Velikost úhlu ARB je 30° . Úhly RBC a CBD jsou sousední (jejich součtem je přímý úhel). Velikost úhlu RBC je 150° .]



D1. V pravidelném 180-úhelníku $A_1A_2 \dots A_{180}$ je bod V průsečíkem přímek A_1A_3 a A_2A_4 . Určete velikosti úhlů $A_1A_3A_2$ a A_1VA_4 .

[Středový úhel pravidelného 180-úhelníku je 1° , vrcholový úhel je 178° . Trojúhelník $A_1A_2A_3$ je rovnostranný a $|\sphericalangle A_1A_2A_3| = 178^\circ$, tedy $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = 1^\circ$. Všechny úhlopříčky shodné s A_1A_3 a A_2A_4 vymezují pravidelný 180-úhelník a úhel A_1VA_4 je jeho vnitřním úhlem. Tedy $|\sphericalangle A_1VA_4| = 178^\circ$.]

Z8–I–5

Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75. Součet čísel a a b je větší než 100 a menší než 200.

Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi. (E. Semerádová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Určete všechny dvojice jednomístných čísel, které mají jednomístný nejmenší společný násobek.

[Číslo 1 může být ve dvojici s jakýmkoli jednomístným číslem: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9). Každé číslo může být ve dvojici s každým svým jednomístným násobkem: (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9). Dále vyhovuje už jen dvojice (2, 3).]

- N2. Určete všechny dvojice čísel, pro které je součin jejich nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele roven 75.

[Prvočíselný rozklad čísla 75 je $3 \cdot 5 \cdot 5$. Odtud dostáváme možnosti (1, 75), (3, 25), (5, 15).]

- N3. Pro čísla $a = 60$, $b = 48$ určete jejich největší společný dělitel D , nejmenší společný násobek N a ověřte, že platí $a \cdot b = D \cdot N$. Rozhodněte, zda obdobný vztah platí pro libovolná čísla a , b .

[Čísla jsou tvaru $a = A \cdot D$ a $b = B \cdot D$, kde A a B jsou nesoudělná čísla. S tímto značením je $N = A \cdot B \cdot D$, tedy rovnost $a \cdot b = D \cdot N$ platí pro všechna přirozená čísla a a b .]

- N4. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 6. Součet čísel a a b je menší než 20. Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi.

[Vyhovující nesoudělné dvojice jsou (1, 6) a (2, 3), vyhovující soudělné dvojice jsou (2, 12), (4, 6) a (6, 9).]

- D1. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele navzájem různých čísel a , b a c je 30. Součet každých dvou čísel z této trojice je větší než 10 a menší než 30. Určete všechny možné trojice čísel a , b , c s uvedenými vlastnostmi.

[Prvočíselný rozklad čísla 30 je $2 \cdot 3 \cdot 5$. Jedině tyto činitele mohou být zastoupeni v prvočíselných rozkladech čísel a , b , c , a to nejvýše ve druhé mocnině pro 2 a 3, resp. v první mocnině pro 5 (aby součet každých dvou čísel byl menší než 30). Vyhovující řešení, až na pořadí čísel ve trojici, jsou (1, 10, 15), (2, 10, 15), (3, 10, 15), (5, 6, 10), (5, 6, 15), (6, 10, 15), (2, 10, 12), (4, 10, 12), (6, 10, 12), (6, 9, 15).]

Z8–I–6

Rybář Štika chytil několik ryb. Když prodal tři nejtlustší ryby majiteli místní restaurace, snížil celkovou hmotnost svého úlovku o 35 %. Když dal tři nejhubenější ryby svému psovi, snížil hmotnost zbývajících ulovených ryb o pět třináctin.

Kolik ryb chytil pan Štika?

(L. Hozová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Rybář Kapr choval ve svém rybníku cejny. Na jaře přikoupil polovinu množství cejnů, které v rybníku měl, a k tomu dostal 20 cejnů od majitele vedlejšího rybníku. Na podzim po výlovu zůstalo v rybníce 182 cejnů, což bylo o 30 procent cejnů méně než po jarním navýšení chovu. Kolik cejnů měl pan Kapr na začátku?

[Po jarním navýšení chovu bylo v rybníce 260 cejnů, před darem majitele vedlejšího rybníku jich bylo 240, na začátku měl pan Kapr 160 cejnů.]

- N2. Štika prohání a pojídá ryby v rybníce. V úterý a ve středu snědla o čtvrtinu více ryb než předchozí den, ve čtvrtek a v pátek snědla o 20 % více ryb než předchozí den a v pátek snědla 36 ryb. Kolik ryb snědla štika v pondělí? Který den měla snědeno právě polovinu všech ryb, které spořádala od pondělí do pátku?

[Ve čtvrtek štika snědla 30 ryb, ve středu 25, v úterý 20 a v pondělí 16. Celkem snědla 127 ryb, polovinu měla snědeno během čtvrtka.]

- N3. Rybář Cejn ulovil 15 ryb a vzal je všechny na trh. Každá z těchto ryb vážila alespoň 500 gramů, ale žádná nevážila více než 3 kilogramy. Během dne si lidé kupovali velké ryby a večer šel rybář domů s nejmenšími kousky ze svého úlovku. Dohromady neprodané ryby vážily pětinu toho, co ranní úlovek. Kolik nejméně a kolik nejvíce ryb pan Cejn prodal?

[Pokud by všechny ryby vážily stejně, pak by neprodané ryby byly tři ($3 = 15/5$). Pokud by všechny prodané ryby vážily 3 kg a všechny neprodané 1/2 kg, pak by neprodaných bylo devět ($9/2 = (9/2 + 6 \cdot 3)/5$). Pan Cejn prodal nejvíce 12 a nejméně 6 ryb.]

- D1. Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem. První třetina lahví zraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady. Pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řáděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici?

[Rozdíl mezi nejdražší a nejlevnější lahví je 60 Kč. Rozdíl celkových škod závisí na tom, ve které třetině řady kocour se svým řáděním skončil: a) Pokud skončil v první třetině, pak rozdíl škod odpovídá počtu shozených lahví. Těch bylo 25, ale $25 \cdot 60 \neq 660$. V této třetině tedy kocour neskončil. b) Pokud skončil ve druhé třetině, pak rozdíl škod odpovídá třetině všech lahví. To dělá $660/60 = 11$ lahví, celkem $3 \cdot 11 = 33$ lahví. Shozených však bylo 25, což je víc než dvě třetiny všech. V této třetině tedy kocour neskončil. c) Pokud skončil v poslední třetině, pak rozdíl škod odpovídá počtu nedotčených lahví. To dělá $660/60 = 11$ lahví, celkem $11 + 25 = 36$ lahví. To je vyhovující možnost. Na polici původně bylo 36 lahví.*]

* Převzato z 59. ročníku MO, úloha **Z7-I-1**.