Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15. *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

V následujících třech návodných úlohách používáme stejnou kalkulačku jako v soutěžní úloze.

N1. Na displeji svítilo číslo 1. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké číslo mohlo být na displeji?

[Buď 5 (při užití prvního tlačítka), nebo 16 (při užití druhého tlačítka).]

N2. Kolika způsoby lze dostat na displeji z čísla 1 číslo 4?

[Jde to čtyřmi způsoby: $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$, $1 \cdot 2 + 1 + 1 = 4$, $(1 + 1) \cdot 2 = 4$, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.]

N3. Na displeji svítilo neznámé číslo. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké mohlo být neznámé číslo, jestliže na displeji nyní svítí číslo a) 15; b) 16?

[a) Jedině 11 ($11 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$). b) Buď 1 ($1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$), nebo 12 ($12 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$).]

D1. Zvláštní kalkulačka funguje jako ta v soutěžní úloze, akorát po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji místo násobení vydělí dvěma. Najděte dva způsoby, jak dostat na displeji z čísla 9 číslo 1.

[Možná řešení jsou znázorněna pomocí tzv. početního hada na obrázku níže. Úloha má nekonečně mnoho řešení, viz např. opakování nápadu $(1 + 1) : 2 = 1$.]

$$9 \xrightarrow{+1} 10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{:2} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1$$

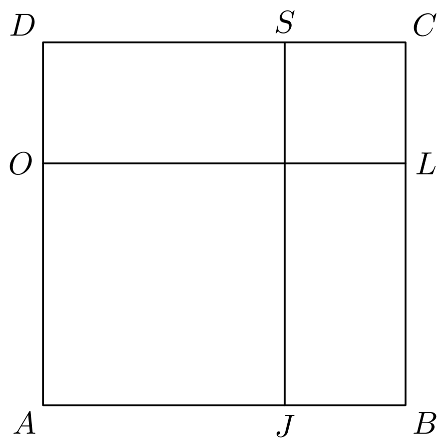
$$9 \xrightarrow{+1} 10 \xrightarrow{+1} 11 \xrightarrow{+1} 12 \xrightarrow{+1} 13 \xrightarrow{+1} 14 \xrightarrow{+1} 15 \xrightarrow{+1} 16 \xrightarrow{:2} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1$$

Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- *procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,*
- *procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.*

Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu? *(M. Macko)*

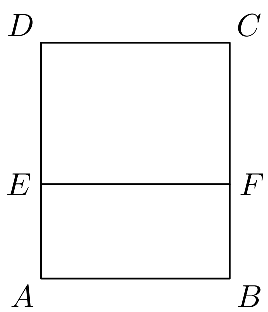


Návodné a doplňující úlohy

N1. Záhon má tvar obdélníku $ABCD$. Přímá cesta z A do B měří 6 metrů. Cesta z A do B přes D a C měří 16 metrů. Jak dlouhá je přímá cesta z B do C?

[Rozdíl délek cest A–D–C–B a A–B je $16 - 6 = 10$ metrů. To odpovídá součtu délek stran AD a BC, které jsou stejné. Přímá cesta z B do C je dlouhá $10 : 2 = 5$ metrů.]

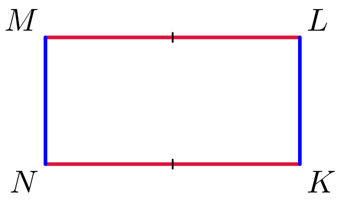
N2. Na obrázku jsou znázorněny cesty, které tvoří hranice dvou obdélníků se společnou stranou. Přímá cesta z A do B měří 8 metrů, nejkratší cesta z A do C měří 18 metrů. Viktor se prochází po cestách z A do C, a to tak, že žádnou část neprojde víc než jednou. Jak dlouhá může být Viktorova procházka?



[Nejkratší procházka je buď A–B–F–C, nebo A–E–F–C, nebo A–E–D–C a je dlouhá 18 metrů. Protože $|AB| = 8$ metrů, je $|BC| = |AD| = 10$ metrů. Jediná další možná procházka je A–B–F–E–D–C a je dlouhá $3 \cdot 8 + 10 = 34$ metrů.]

N3. Přímá cesta mezi vrcholy K a L obdélníku $KLMN$ je pětkrát kratší než cesta po obvodu z K přes N a M do L. Vyjádřete délku cesty z L přes M do N pomocí délky některé strany obdélníku.

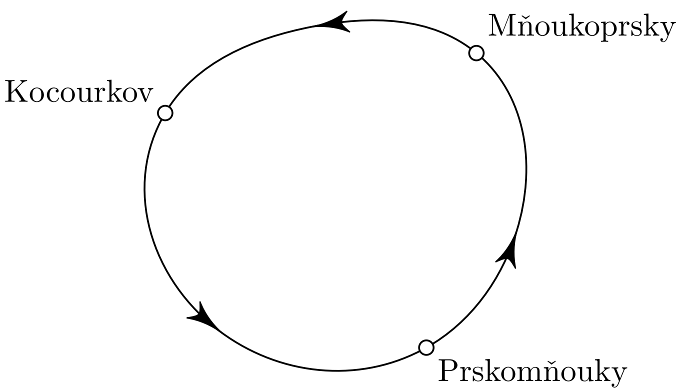
[Stejně dlouhé strany obdélníku zvýrazníme stejnými barvami, viz obrázek. Součet délek dvou červených a jedné modré úsečky je pětkrát větší než délka modré úsečky ($2\check{c}+m = 5m$). Tedy červená úsečka je dvakrát delší než modrá ($\check{c} = 2m$). Cesta L–M–N je stejně dlouhá jako tři modré nebo jedna a půl červené strany obdélníku ($\check{c} + m = 3m = \frac{3}{2}\check{c}$).]



D1. Jarmila překonala vzdálenost mezi dvěma keři čtyřmi kroky, Lenka stejnou vzdálenost překonala třemi kroky. Přitom krok Lenky byl o 15 cm delší než krok Jarmily. Jak daleko od sebe byly keře?

[Po třech krocích je Lenka o $3 \cdot 15 = 45$ cm dál než Jarmila. Tedy délka Jarmilina kroku je 45 cm a vzdálenost keřů je $4 \cdot 45 = 180$ cm.]

D2. Okružní cesta spojuje tři vesnice jako na obrázku. Ve vyznačeném směru to je z Prskomňouk do Kocourkova 10 km, z Mňoukoprsk do Prskomňouk 15 km a z Kocourkova do Mňoukoprsk 16 km. Jak dlouhá je celá okružní cesta?



[Součet popsaných vzdáleností mezi vesnicemi odpovídá dvěma délkám okružní cesty, tj. $10 + 15 + 16 = 41$ km. Délka okružní cesty je poloviční, tedy 20 km a 500 m.*]

* Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z5–II–2**.

Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka? *(M. Dillingerová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Radka a Šárka měly dohromady 60 malin. Radka jich měla dvakrát tolik co Šárka. Kolik malin měla každá z děvčat?

[Dohromady měly trojnásobek toho, co měla Šárka. Šárka měla 20 malin, Radka 40.]

N2. Bolek a Lolek měli dohromady 60 borůvek. Bolek jich měl a) o polovinu; b) o třetinu méně než Lolek. Kolik borůvek měl každý z chlapců?

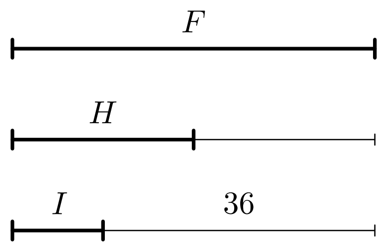
[a) Dohromady měli 3/2 toho, co měl Lolek. Lolek měl 40 borůvek, Bolek 20. b) Dohromady měli 5/3 toho, co měl Lolek. Lolek měl 36 borůvek, Bolek 24.]

N3. Terezka měla o 30 švestek víc než Žaneta, a ta měla a) dvakrát; b) třikrát; c) čtyřikrát méně švestek než Terezka. Kolik švestek měla Žaneta?

[30 švestek odpovídá a) počtu; b) dvojnásobku; c) trojnásobku Žanetiných švestek. Žaneta měla a) 30; b) 15; c) 10 švestek.]

D1. Filip měl dvakrát tolik třešní co Honza. Honza měl dvakrát tolik třešní co Ivan. Ivan měl o 36 třešní méně než Filip. Kolik třešní měl Honza?

[Filip měl čtyřikrát tolik třešní co Ivan. Tedy 36 třešní odpovídá trojnásobku Ivanových třešní. Ivan měl 12 třešní, Honza jich měl 24. Pro přehlednost si lze pomoct úsečkami jako na obrázku níže.]



Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(M. Petrová)

Návodné a doplňující úlohy

V následujících úlohách používáme v zápisech čísel písmena velké abecedy pro neznámé číslice.

N1. Míša si zvolila jednomístné číslo. Zjistila, že když jím vynásobí jakákoliv dvě různá jednomístná čísla, výsledné součiny budou končit jinými číslicemi. Jaké mohlo být Míšino číslo?

[Stačí projít výsledky malé násobilky. Míšino číslo mohlo být 1, 3, 7, nebo 9.]

N2. Určete hodnotu číslice A tak, aby číslo tvaru a) $A4$; b) $AA5$ bylo násobkem devíti.

[a) Dvojmístným násobkem devíti končícím 4 je pouze číslo 54, tedy $A = 5$. b) Trojmístných násobků devíti končících 5 je deset, ale jen u čísla 225 se opakuje číslice na prvních dvou místech. Tedy $A = 2$.]

N3. Když se číslo $A82$ vydělí sedmi, dělení vyjde beze zbytku. Jaká může být číslice A? Najděte všechna řešení.

[Poslední číslice podílu musí být 6, protože pouze součin $6 \cdot 7 = 42$ končí číslicí 2. Pak také dělení $(A82 - 42) : 7 = A40 : 7$ musí vyjít beze zbytku. Tedy číslice A je buď 1, nebo 8.]

D1. Součin dvojmístných čísel AB a BA je roven 7663. Určete číslice A a B.

[Součin končí číslicí 3, tedy číslice A a B jsou buď 1 a 3, nebo 7 a 9. V prvním případě vychází $13 \cdot 31 = 403$, ve druhém vychází $79 \cdot 97 = 7663$. Číslice A a B jsou 7 a 9.]

D2. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různé. O číslicích označených hvězdičkou nevíme nic bližšího. Nahraďte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & & A & B & C \\
\times & & & & A & C \\
\hline
 & & A & * & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & A & B & \\
\hline
 & * & * & B & 8 & *
\end{array}
$$

[Výsledek na posledním řádku: Hvězdička na místě jednotek je 1 a z počítání na místě desítek plyne $B = 7$. Mezivýsledek na třetím řádku: Z hodnoty na místě jednotek plyne buď $C = 1$, nebo $C = 9$. Pro $C = 1$ na místě desítek vychází 7, což nevyhovuje. Pro $C = 9$ na místě desítek vychází 1, což vyhovuje. Mezivýsledek na čtvrtém řádku končí 7, a to je poslední číslice součinu $9 \cdot A$. Tedy $A = 3$ a algebrogram je dořešen níže.]

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & & 3 & 7 & 9 \\
\times & & & & 3 & 9 \\
\hline
 & & 3 & 4 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 3 & 7 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 7 & 8 & 1
\end{array}
$$

D3. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různé. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r} A\,H\,A \\ \times \qquad T\,U \\ \hline P\,T\,P\,T \\ U\,P\,U\,P \\ \hline U\,T\,E\,T\,T \end{array}$$

[Z tvaru mezivýsledků na třetím a čtvrtém řádku plyne $H = 0$. Z prvních dvou číslic ve výsledku na posledním řádku plyne, že P je menší než 5 a T je sudé. Mezivýsledek na čtvrtém řádku končí P, a to je poslední číslice součinu $A \cdot T$, tedy také P je sudé. Proto je buď $P = 2$ a $T = 4$, nebo $P = 4$ a $T = 8$. První možnost vede k řešení níže, druhá nevyhovuje.]

$$\begin{array}{r} 8\,0\,8 \\ \times \qquad 4\,3 \\ \hline 2\,4\,2\,4 \\ 3\,2\,3\,2 \\ \hline 3\,4\,7\,4\,4 \end{array}$$

Z5–I–5

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti. *(M. Macko)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Z čísel 3, 4, 5, 6, 7 vyberte dvojici, jejíž součet je a) roven devíti; b) menší než devět. Najděte všechny možnosti.

[a) Buď dvojice 3 a 6, nebo 4 a 5. b) Buď dvojice 3 a 4, nebo 3 a 5.]

N2. Z čísel 11, 15, 19, 31, 35 a 39 vytvořte tři dvojice se stejnými součty.

[Součet všech čísel je 150, tedy součet čísel v jedné dvojici má být 50. Řešení odpovídá dvojicím sčítanců $11 + 39 = 19 + 31 = 15 + 35$.]

N3. Z čísel 2, 3, 4, 5 a 6 vyberte dvě dvojice se stejnými součty. Najděte všechny možnosti.

[Čísel je pět, tedy jedno se při tvorbě dvojic vynechá. Tři čísla jsou sudá a dvě lichá, tedy nelze vynechat liché číslo. Řešení odpovídá dvojicím sčítanců $3+6 = 4+5$, nebo $3+5 = 2+6$, nebo $2 + 5 = 3 + 4$.]

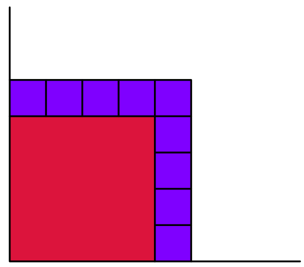
D1. Z čísel 5, 6, 8, 9, 11 a 13 sestavte dvě trojice se stejnými součty.

[Součet všech čísel je 52, tedy součet čísel v jedné trojici má být 26. Řešení odpovídá trojicím sčítanců $5 + 8 + 13 = 6 + 9 + 11$.]

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti. *(M. Macko)*



Návodné a doplňující úlohy

V následujících úlohách lemem obdélníku nebo čtverce rozumíme souvislý stejně široký pás, který jej obklopuje. Lem vztažený jen k některým stranám obdélníku nebo čtverce je zbylými stranami omezen obdobně jako fialový lem kolem dvou stran karmínového čtverce na obrázku v soutěžní úloze.

N1. Kolem čtvercové dlaždice se stranou 5 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 1 dm. Kolik dlaždic je na lem potřeba?

[Podél každé strany velké dlaždice je třeba 5 malých dlaždic, u vrcholů další 4. Celkem je třeba $4 \cdot 5 + 4 = 24$ dlaždic.]

N2. Kolem dvou sousedních stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 2 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 4 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik dlaždic je na oba lemy potřeba?

[Je to možné: Na první lem bude třeba $2 \cdot 3 + 1 = 7$ dlaždic, na druhý $2 \cdot 2 + 1 = 5$ dlaždic. Celkem je třeba 12 dlaždic.]

N3. Kolem tří stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 3 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 5 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik celkem dlaždic je na oba lemy potřeba?

[Není to možné: První lem vytvořit lze, vzniklý obdélník bude mít rozměry 9 dm a 12 dm. Druhý lem vytvořit nelze, protože žádný z předchozích rozměrů v dm není násobkem 5.]

D1. Kolem tří stran obdélníkové dlaždice se stranami 12 dm a 15 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic s velikostí strany vyjádřenou v dm celým číslem. Kolik dlaždic je na lem potřeba? Najděte všechny možnosti.

[Čtvercové dlaždice mohou mít stranu buď 1 dm, nebo 3 dm. Počet použitých dlaždic závisí na jejich velikosti a na tom, která strana obdélníku není lemována. Dlaždic prvního typu je třeba buď $2 \cdot 12 + 15 + 2 = 41$, nebo $2 \cdot 15 + 12 + 2 = 44$. Dlaždic druhého typu je třeba buď $2 \cdot 4 + 5 + 2 = 15$, nebo $2 \cdot 5 + 4 + 2 = 16$.]