75. ročník Matematické olympiády – 2025/2026

Úlohy krajského kola kategorie P

Krajské kolo 75. ročníku MO kategorie P se koná v úterý 20. 1. 2026 v dopoledních hodinách. Na řešení úloh máte 4 hodiny čistého času. V krajském kole MO-P se neřeší žádná praktická úloha, pro zajištění rovných podmínek řešitelů ve všech krajích je použití počítačů při soutěži zakázáno (s výjimkou nahrávání řešení do odevzdávacího systému). Zakázány jsou rovněž jakékoliv další pomůcky kromě psacích potřeb (např. knihy, výpisy programů, kalkulačky, mobilní telefony). Řešení každé úlohy vypracujte na samostatný list papíru.

Řešení každé úlohy má obsahovat *popis řešení,* to znamená slovní popis principu zvoleného algoritmu, *argumenty zdůvodňující jeho správnost* (případně důkaz správnosti algoritmu), *diskusi o efektivitě* vašeho řešení (časová a paměťová složitost). Není možné odkazovat se na vaše řešení úloh domácího kola.

Do řešení nemusíte psát odpovídající program, algoritmus stačí zapsat ve vhodném pseudokódu nebo dokonce jenom slovně, je-li popis dostatečně podrobný a srozumitelný. Nemusíte detailně popisovat jednoduché operace jako vstupy, výstupy, implementaci jednoduchých matematických vztahů, vyhledávání v poli, třídění apod. Podrobnější seznam algoritmů a datových struktur, které považujeme za obecně známé a můžete je používat bez podrobnějšího popisu, naleznete na konci zadání.

Za každou úlohu můžete získat maximálně 10 bodů. Hodnotí se nejen správnost řešení, ale také kvalita jeho popisu a efektivita zvoleného algoritmu. Algoritmy posuzujeme podle jejich časové složitosti, tzn. závislosti doby výpočtu na velikosti vstupních dat. Záleží přitom pouze na řádové rychlosti růstu této funkce. V zadání každé úlohy najdete přibližné limity na velikost vstupních dat. Efektivním vyřešením úlohy rozumíme to, že váš program spuštěný s takovými daty na současném běžném počítači dokončí výpočet během několika sekund.

Vzorová řešení úloh naleznete krátce po soutěži na webových stránkách olympiády *https://mo.mff.cuni.cz/p/*. Na stejném místě bude zveřejněn i seznam úspěšných řešitelů krajského kola a seznam řešitelů postupujících do ústředního kola. Svá opravená řešení s komentáři opravovatelů najdete v OSMO.

P-II-1 Sisyfos a balvany

Známého řeckého krále Sisyfa bohové odsoudili k tomu, aby navěky marně valil balvan do kopce. Nedávno mu ale díky změnám v pracovních předpisech byli nuceni tento trest upravit a místo toho nyní balvany přenáší a řadí dle váhy.

Bohové ho postavili na začátek řady n balvanů očíslovaných zleva doprava od 0 do $n-1$; hmotnost balvanu stojícího na pozici i budeme označovat jako $H[i]$. Úkolem Sisyfa je seřadit balvany od nejlehčího po nejtěžší, tedy tak, aby na konci platilo $H[0] \leq H[1] \leq \cdots \leq H[n-1]$. Aby se vyhnul nutnosti přenášet balvany na dlouhé vzdálenosti, rozhodl se Sisyfos postupovat následovně:

- Jde podél balvanů zleva doprava.
- Kdykoli narazí na balvan, který má bezprostředně nalevo od sebe těžší balvan, vymění je, těžší balvan posune o jednu pozici doprava a lehčí balvan o jednu pozici doleva. Formálněji řečeno, když Sisyfos dorazí na pozici $i \geq 1$ a vidí, že $H[i-1] > H[i]$, prohodí hodnoty $H[i-1]$ a $H[i]$.
- Poté se vrátí na začátek řady (přitom balvany neprohazuje).

Tomuto postupu budeme říkat *kolo*. Sisyfos ho opakuje až do chvíle, kdy už v nějakém kole neprovede žádnou další výměnu.

Soutěžní úloha

Tato úloha má několik podúloh; můžete řešit každou zvlášť, ale i napsat algoritmus, který vyřeší podúlohy b) a c) zároveň.

a) (2 body) Dokažte, že pro libovolnou posloupnost balvanů Sisyfos po konečném počtu kol skončí.

b) (3 body) Ukázalo se, že Sisyfos nezvládne přesunout balvany, jejichž hmotnost je větší než w. Proto upravil svůj postup tak, že pokud by měl prohodit dva balvany, z nichž je alespoň jeden moc těžký, místo toho nic neudělá a posune se na další pozici.

   Vstup tvoří čísla n, w a pole H obsahující hmotnosti balvanů v jejich počátečním pořadí. Napište algoritmus, který určí hmotnosti balvanů na jednotlivých pozicích poté, co Sisyfos skončí. Výstupem je tedy konečný obsah pole H.

c) (5 bodů) Napište algoritmus, který pro stejný vstup jako v podúloze b) určí, kolik kol bude Sisyfův postup trvat pro tuto konkrétní posloupnost balvanů a hodnotu w. Nezapomeňte dokázat správnost vašeho algoritmu!

Připomínáme, že nemusíte řešit detaily implementace vstupů a výstupů; můžete tedy například předpokládat, že na začátku běhu algoritmů řešících podúlohy b) a c) už máte vstupy načtené v poli H a proměnných n a w.

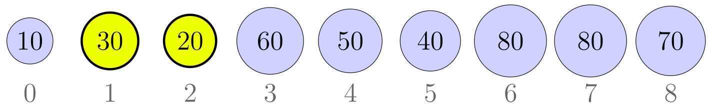
Bodování

Plný počet bodů za podúlohy b) a c) získají řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n \log n)$, tedy efektivní pro $n \leq 10^5$. Řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$, tedy efektivní pro $n \leq 5\,000$, získají 1 bod za každou z těchto podúloh. Jeden bod strhneme algoritmům, které fungují pouze za předpokladu, že všechny hmotnosti v poli H jsou navzájem různé.

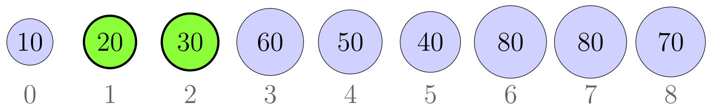
Příklady

Nechť $n = 9$ a balvany mají po řadě hmotnosti 10, 30, 20, 60, 50, 40, 80, 80, 70. Nejprve uvažujme situaci, kdy Sisyfos může přesunout všechny balvany, tj. $w \geq 80$. V prvním kole by Sisyfos postupoval následovně:

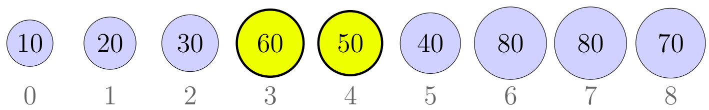
- Na pozici 1 není třeba nic dělat.
- Na pozici 2 je balvan lehčí než ten vlevo:



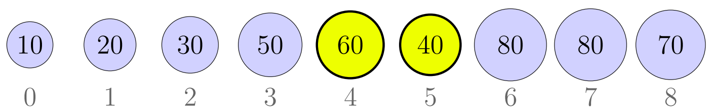
- Tyto balvany budou prohozeny:



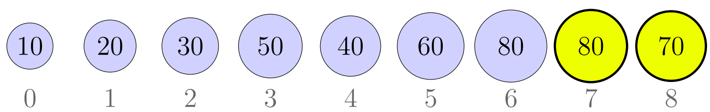
- Na pozici 3 není třeba nic dělat.
- Na pozici 4 je balvan lehčí než ten vlevo:



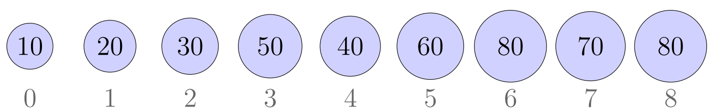
- Po jejich výměně se vyskytuje další takový případ na pozici 5:



- Na pozicích 6 a 7 není třeba nic dělat.
- Na pozici 8 provede další výměnu:

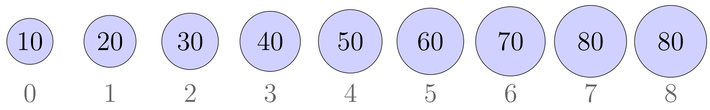


- Na konci prvního kola vypadá pole H takto:



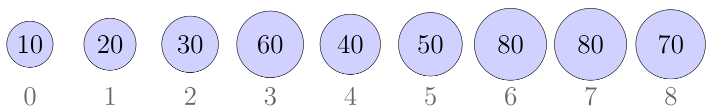
Ve druhém kole by Sisyfos provedl výměnu na pozici 4 (balvany o hmotnosti 50 a 40) a poté na pozici 7 (balvany o hmotnosti 80 a 70).

Ve třetím kole by Sisyfos neprovedl žádné výměny. Proces by tedy skončil po třech kolech seřazeným polem H:



Kdyby byl Sisyfos o něco slabší ($w = 59$), postupoval by v prvním kole následovně:

- Na pozici 1 není třeba provádět žádnou akci.
- Na pozici 2 provede výměnu (hmotnosti 30 a 20).
- Na pozici 3 není třeba nic dělat.
- Na pozici 4 nemůže provést výměnu, takže neudělá nic.
- Na pozici 5 provede výměnu (hmotnosti 50 a 40).
- Na pozicích 6 a 7 není třeba provádět žádnou akci.
- Na pozici 8 nelze provést výměnu, takže tyto dva balvany také zůstanou na svém místě.
- Na konci prvního kola vypadá pole H následovně:



Ve druhém kole by Sisyfos neprovedl žádné výměny, proces by tedy skončil po dvou kolech ve výše zobrazeném stavu.

Kdyby byl Sisyfos ve stejné výchozí situaci ještě slabší ($w = 27$), neprovedl by v prvním kole žádné změny a celý proces by ihned skončil.

P-II-2 Obdélník

Augiáš se rozhodl postavit nový chlév ve tvaru obdélníku pro svůj dobytek. Již ze dřívějška mu na jeho pozemku stojí několik sloupů, na něž mohou být stěny chléva upevněny. Jelikož je nejen nepořádný, ale i lakomý, chtěl by k tomuto účelu využít všechny tyto sloupy.

Soutěžní úloha

V rovině máte dáno $n \geq 10$ navzájem různých bodů, udávajících pozice sloupů. Navrhněte algoritmus, který určí, zda všechny tyto body leží na obvodu nějakého (libovolně otočeného) obdélníku. Pokud ano, najděte jeden takový obdélník.

Formát vstupu

Na prvním řádku vstupu je přirozené číslo n. Následuje n řádků popisujících zadané body; na i-tém z nich jsou dvě celá čísla x_i a y_i, která udávají souřadnice i-tého bodu.

Formát výstupu

Vypište buď řetězec „`NE`“, jestliže hledaný obdélník neexistuje, nebo souřadnice tří z vrcholů nějakého obdélníka, na jehož obvodu leží všechny zadané body. Tyto souřadnice nemusí být celočíselné.

Bodování

Při psaní algoritmu můžete předpokládat, že všechny operace s reálnými čísly jsou přesné. Jinými slovy, není třeba řešit zaokrouhlovací chyby, které by mohly nastat při praktické implementaci.

Abyste získali plný počet bodů, musíte najít řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n)$, tedy efektivní pro $n \leq 10^7$, a dokázat jeho správnost. Řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n \log n)$ (efektivní pro $n \leq 10^5$) mohou získat až 8 bodů a řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$ (efektivní pro $n \leq 5\,000$) mohou získat až 6 bodů. Pomalejší správná řešení mohou získat až 4 body.

Příklady

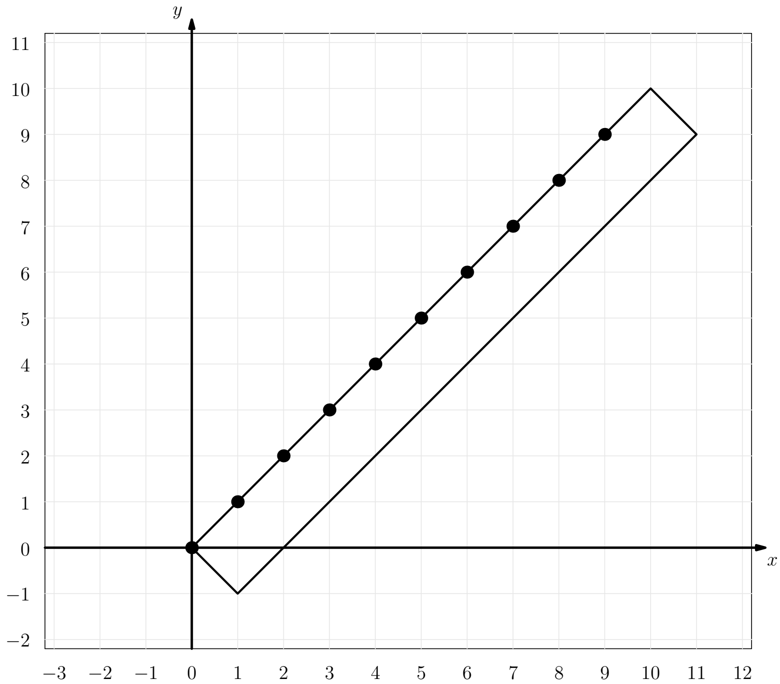
Vstup:

```
10
0 0
1 1
2 2
3 3
9 9
8 8
7 7
6 6
5 5
4 4
```

Výstup:

```
0 0
10 10
11 9
```

V tomto příkladu body leží na jedné přímce, řešením je tedy libovolný obdélník, jehož jedna strana obsahuje všechny zadané body.



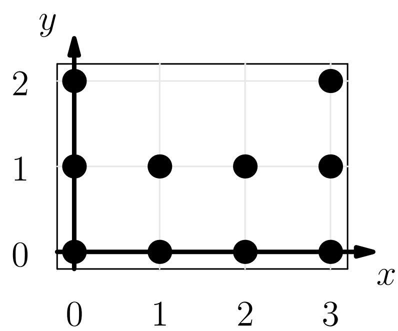
Vstup:

```
10
0 0
1 0
2 0
3 0
0 1
1 1
2 1
3 1
0 2
3 2
```

Výstup:

```
NE
```

Žádný obdélník nemá na hranici všechny zadané body.



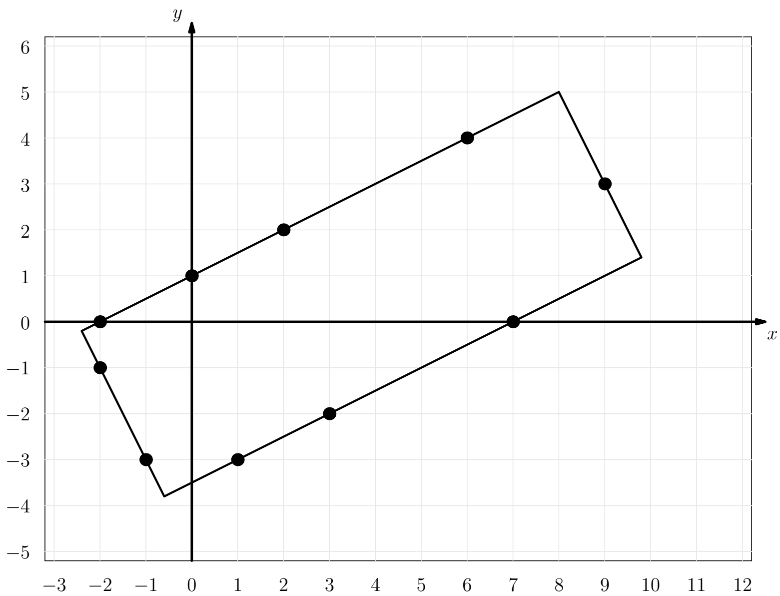
Vstup:

```
10
-2 0
0 1
2 2
6 4
9 3
7 0
3 -2
1 -3
-1 -3
-2 -1
```

Výstup:

```
-2.4 -0.2
8 5
9.8 1.4
```

Zde existuje jediné řešení.



P-II-3 Platónova Akademie

Gratulujeme, byli jste přijati ke studiu na Platónově Akademii! Nechcete ale ve školních lavicích strávit zbytečně moc času, rádi byste si proto rozvrhli předměty tak, abyste dostudovali co nejdříve.

Soutěžní úloha

Abyste vystudovali, musíte absolvovat n předmětů, očíslovaných od 0 do $n-1$. Předměty musíte studovat v předepsaném pořadí, tj. pro žádné $i < j$ nesmíte začít studovat předmět j dříve než předmět i (můžete je ale začít studovat zároveň).

Absolvování každého z předmětů vyžaduje dva po sobě jdoucí kalendářní měsíce (první měsíc chodíte na přednášky a ten druhý skládáte zkoušky). Předmět i vám zabere $A[i]$ hodin během prvního měsíce a $B[i]$ hodin během druhého měsíce. V rámci každého měsíce můžete studovat i více předmětů, nesmí vám ale dohromady zabrat více než p hodin. Speciálně tedy nesmíte začít dohromady studovat předměty, které by vám ve druhém (zkouškovém) měsíci zabraly více než p hodin, i kdyby se vám jejich první (přednáškový) měsíc do limitu p hodin vešel.

Navrhněte algoritmus, který vypočítá minimální počet měsíců potřebných k dostudování.

Formát vstupu

Na prvním řádku vstupu jsou přirozená čísla p a n. Na i-tém z n následujících řádků jsou dvě nezáporná celá čísla udávající hodnoty $A[i-1]$ a $B[i-1]$; obě tyto hodnoty jsou menší nebo rovny p.

Formát výstupu

Na výstup vypište jediné číslo, minimální počet měsíců, za něž lze dostudovat.

Bodování

Plný počet bodů mohou získat řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$, tedy efektivní pro $p \leq 10^9$ a $n \leq 5\,000$. Nanejvýš 8 bodů mohou získat řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^3)$, tedy efektivní pro $p \leq 10^9$ a $n \leq 300$. Nanejvýš 6 bodů mohou získat řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2 p)$ či obdobnou, tedy efektivní pro $p, n \leq 300$. Nanejvýš 4 body mohou získat řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(2^n)$ či obdobnou, tedy efektivní pro $p \leq 10^9$ a $n \leq 12$.

Příklady

Vstup:
```
1000 4
300 100
300 100
100 800
700 200
```
Výstup:
```
3
```

První měsíc bychom sice mohli začít studovat předměty 0, 1 *a* 2 *dohromady, pak bychom ale na studium předmětu* 3 *měli čas až třetí a čtvrtý měsíc. Lepší bude začít v prvním měsíci pouze předměty* 0 *a* 1 *(to nám zabere* $300 + 300 = 600$ *hodin) a předměty* 2 *a* 3 *začít studovat ve druhém měsíci. Ve druhém měsíci budeme potřebovat* $100 + 100 = 200$ *hodin na dokončení předmětů* 0 *a* 1 *a* $100 + 700 = 800$ *hodin na zahájení studia předmětů* 2 *a* 3*, což se nám dohromady vejde do limitu* 1000 *hodin. Ve třetím měsíci nám dostudování předmětů* 2 *a* 3 *zabere* $800 + 200 = 1000$ *hodin.*

Vstup:
```
1000 3
100 800
100 800
100 800
```
Výstup:
```
4
```

Žádné dva předměty nemůžeme začít studovat naráz, protože ve druhém měsíci bychom na jejich dokončení potřebovali $800 + 800 = 1600 > 1000$ *hodin. Nejlepší je tedy každý měsíc začít studovat jeden předmět.*

Vstup:
```
1000 5
500 499
500 500
1 1
500 500
499 500
```
Výstup:
```
4
```

P-II-4 Řešič to opět vyřeší

K této úloze se vztahuje studijní text uvedený na následujících stranách, který je stejný jako v domácím kole. Úloha se skládá ze dvou nezávislých podúloh, řešit můžete kteroukoliv z nich nebo obě dvě v libovolném pořadí.

Podúloha A: Slabé závislosti (2 body)

Připomeňme zadání úlohy z domácího kola: Máme k dispozici e eur. Existuje n projektů (očíslovaných od 1 do n), do kterých můžeme investovat; každý z nich buď podpoříme, nebo ne. U každého projektu známe částku s_i potřebnou k jeho podpoře a hodnotu v_i, kterou získáme zpět jako výnos, pokud jej podpoříme. Výnos obdržíme až na konci realizace všech podpořených projektů, součet hodnot s_i těchto projektů tedy nemůže přesáhnout e.

Pro krajské kolo navíc mezi projekty mohou být *slabé závislosti* v následujícím tvaru: Projekt x_i můžeme podpořit pouze tehdy, pokud také podpoříme alespoň jeden z projektů $y_{i,1}$, $y_{i,2}$, …, y_{i,z_i}. Například projekt pěstování bio zelí nelze uskutečnit, pokud nepodpoříme ani projekt instalace automatického zavlažování, ani projekt 3D tisku dvojručných kbelíků.

Popište, jak pro danou sadu projektů a seznam slabých závislostí mezi nimi sestavit ILP, jehož optimální řešení odpovídá sadě projektů, jejichž podpora nám přinese maximální celkový zisk. Popište celý ILP, včetně částí, které zůstávají stejné jako v domácím kole.

Příklad

Mějme $e = 110\,000$ eur a $n = 5$ projektů. Částky s_i na jejich podporu jsou po řadě 50 000, 50 000, 20 000, 40 000, 49 999 a výnosy v_i jsou po řadě 50 100, 95, 26 000, 900 000, 1.

Mezi projekty jsou dvě slabé závislosti:

- projekt 4 závisí na projektu 3
  (tedy $x_1 = 4$, $z_1 = 1$ a $y_{1,1} = 3$)
- projekt 3 závisí na projektech 2 a/nebo 5
  (tedy $x_2 = 3$, $z_2 = 2$, $y_{2,1} = 2$ a $y_{2,2} = 5$).

Optimální řešení je podpořit projekty 2, 3 a 4, na konci tak budeme mít 816 095 eur.

Pokud bychom ve stejné situaci měli jen 100 000 eur, optimální by bylo podpořit jen projekt 1.

Podúloha B: Lyžařské sjezdovky (8 bodů)

Kolem horské vesnice se nachází k kopců očíslovaných od 1 do k, na kterých můžeme budovat lyžařské sjezdovky. Na každý kopec se nám ale sjezdovky vejdou *nejvýše tři*. Každá sjezdovka postavená na kopci i musí mít celočíselnou délku, a to alespoň ℓ_i a nanejvýš u_i metrů. Postavení každého metru sjezdovky na kopci i nás stojí c_i eur. Navíc bychom chtěli, aby celková délka všech sjezdovek v celém lyžařském areálu byla přesně d metrů.

Popište, jak sestavit ILP, který bude mít řešení, právě když je to možné. Optimální řešení tohoto ILP navíc musí odpovídat nejlevnějšímu možnému způsobu výstavby požadované sady sjezdovek.

Jednodušší varianty

Můžete se také rozhodnout řešit jednu z následujících jednodušších variant této podúlohy:

- Za vyřešení varianty, v níž je na každém kopci možné postavit *nejvýše jednu* sjezdovku, můžete získat až 6 bodů.
- Za vyřešení varianty, v níž všechny kopce splňují $\ell_i = u_i$, můžete získat až 3 body.

Pokud odevzdáte řešení jedné z těchto jednodušších variant, uveďte to prosím výrazně hned na jeho začátku.

Příklad

Máme $k = 2$ kopce:

- Na prvním se dají stavět sjezdovky délky $\ell_1 = 1000$ až $u_1 = 1100$ metrů, a to metr za $c_1 = 100$ eur,
- na druhém sjezdovky délky $\ell_2 = 300$ až $u_2 = 400$ metrů, a to metr za $c_2 = 70$ eur.

Chceme areál s 2410 metry sjezdovek.

Jedním optimálním řešením je postavit na prvním kopci dvě sjezdovky délek 1003 a 1007 metrů a na druhém kopci jednu sjezdovku délky 400 metrů. Dohromady nás to bude stát 229 000 eur.