

Úlohy domácího kola kategorie B

1. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme jedno reálné číslo tak, aby každá stěna měla stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být navzájem různých? (Mária Dományová)

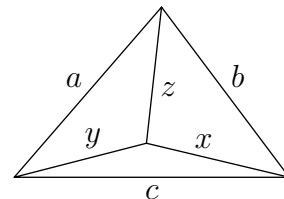
ŘEŠENÍ. Označme čísla na jednotlivých hranách x, y, z, a, b, c jako na obrázku a S společný součet na stěnách. Podle zadání řešíme následující soustavu rovnic

$$a + b + c = S,$$

$$a + y + z = S,$$

$$b + z + x = S,$$

$$c + x + y = S.$$



Sečtením prvních dvou a odečtením posledních dvou rovnic dostaneme $a = x$, podobně dokážeme $b = y$ a $c = z$. Všech šest čísel tedy nabývá dohromady nejvýše tří různých hodnot. Volba $(a, b, c, x, y, z) = (1, 2, 3, 1, 2, 3)$ ukazuje, že tři z přiřazených čísel mohou být různá.

KOMENTÁŘ. Uvedené operace provedené s rovnicemi nejsou jedinou možností vedoucí k řešení. Např. z prvních dvou rovnic plyne $b + c = S - a = y + z$, podobně ze zbylých dvou dostaneme $b + z = c + y$ a odečtením získaných rovnic obdržíme $c - z = z - c$ neboli $c = z$, podobně bychom získali zbylé dvě rovnosti.

Tyto a podobné algebraické postupy můžeme provést i bez explicitního sestavení soustavy rovnic a manipulace s nimi. Vzorové řešení bychom mohli zformulovat například následovně. Nejprve opět označíme společný součet trojic čísel kolem stěn S . Všimneme si, že zvolíme-li kterékoli dvě stěny čtyřstěnu s_1 a s_2 , mají právě jednu společnou hranu h a dohromady sousedí se všemi hranami čtyřstěnu kromě jedné, ležící naproti h , kterou označíme h' . Když využijeme zadanou podmínku na tyto dvě stěny, zjistíme, že součet čísel u všech hran kromě h' a s dvakrát započítaným číslem u h , je roven $2S$. Tatáž úvaha se zbylými dvěma stěnami dá podobnou rovnost, jen číslo u h' bude započítáno dvakrát a naopak vynecháno bude číslo u h . Z toho ale nutně vyplývá, že čísla u h i h' jsou stejná, jinak by nemohl v obou případech vyjít stejný součet $2S$. Podobně dostaneme stejný vztah pro zbylé dvě dvojice protějších hran.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Uvažme čtyři čísla taková, že každá tři mají stejný součet. Ukažte, že pak musí být všechna stejná. [Označme čísla x_1, x_2, x_3, x_4 a jejich součet S . Pak platí $S - x_1 = x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = S - x_4$, porovnáním krajních výrazů dostaneme $x_1 = x_4$, podobně pro ostatní dvojice. Součet S není třeba zavádět, jelikož z $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4$ dostáváme ihned $x_1 = x_4$ a analogicky pro zbylé dvojice. Zde se jedná jen o kosmetický rozdíl, ale v některých obtížnějších úlohách může označení vhodného symetrického výrazu vnést do řešení systém a ukázat správnou cestu k cíli.]

- N2. Pět čísel je napsaných po obvodu kruhu tak, že každá tři sousední mají stejný součet. Ukažte, že pak musí být všechna stejná. [Označme čísla x_1 až x_5 , společnou hodnotu součtů sousedních trojic T a součet všech pěti čísel S . Pak platí

$$2T = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_1) = S + x_1,$$

$$2T = (x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_1 + x_2) = S + x_2$$

a podobně (posunem začátku sčítání kolem kruhu) pro ostatní tři čísla. Porovnáním snadno dostaneme požadovanou rovnost.]

- N3. Šest čísel je napsaných po obvodu kruhu tak, že každá tři sousední mají stejný součet. Kolik nejvýše z nich může být různých? [Tři. Opět označíme čísla x_1 až x_6 v pořadí okolo kruhu. Pak $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4$, z čehož plyne $x_1 = x_4$ a analogicky dostaneme rovnosti $x_2 = x_5$ a $x_3 = x_6$. Dalšími kombinacemi zadaných podmínek/rovníc už více informací nedostaneme, např. šestice $(1, 2, 3, 1, 2, 3)$ splňuje zadané podmínky, tedy tři různá čísla mohou být. (Dokonce vyhovuje každá šestice tvaru (a, b, c, a, b, c)).]
- D1. Každé stěně krychle přiřadíme reálné číslo tak, aby všechny vrcholy krychle měly stejný součet čísel na třech přilehlých stěnách. Kolik ze šesti čísel přiřazených stěnám může být navzájem různých? [Jedno, dvě nebo tři. Pohledem na dva sousední vrcholy krychle dostaneme, že na protějších stěnách krychle musí být stejná čísla. Naopak, pokud na horní a dolní stěně bude číslo a , na levé a pravé b a na přední a zadní c , pak u každého vrcholu bude součet $a + b + c$. Z čísel a, b, c tedy mohou být právě jedno až tři navzájem různá.]
- D2. Pro reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Kolik z rovností $ab = cd$, $ac = bd$, $ad = bc$ může současně platit? Určete všechny takové počty. [A-74-IV-1]

2. Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě končí dvojčíslím 90. Dokažte, že součin všech jeho kladných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. (Ján Mazák)

ŘEŠENÍ. V tomto řešení budeme slovem *dělitel* mínit *kladný dělitel*. Nejprve ukážeme, že počet dělitelů čísla n je násobek čtyř. Jelikož číslo n končí dvojčíslím 90, platí $n = 4 \cdot 25k + 90$. Je tak dělitelné 2, ale už ne $2^2 = 4$ (připomeňte si kritérium dělitelnosti čtyřmi). Podobně je n dělitelné 5, ale už ne $5^2 = 25$. Libovolný dělitel n lze zapsat jako $d = 2^a \cdot 5^b \cdot z$, kde $a, b \in \{0, 1\}$ a z je libovolný dělitel n nesoudělný s 2 a 5. Zafixováním dvojice hodnot a a b (celkem čtyři možnosti) a dosazením všech možných hodnot z rozdělíme všechny dělitele n na čtyři stejně velké skupiny, jejich počet je tedy dělitelný čtyřmi. Např. pro $n = 90 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$ máme $z \in \{1, 3, 9\}$ a výše popsané skupiny vypadají takto:

- $(a = 0, b = 0) \quad \{1, 3, 9\},$
- $(a = 0, b = 1) \quad \{5 \cdot 1, 5 \cdot 3, 5 \cdot 9\} = \{5, 15, 45\},$
- $(a = 1, b = 0) \quad \{2 \cdot 1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 9\} = \{2, 6, 18\},$
- $(a = 1, b = 1) \quad \{(5 \cdot 2) \cdot 1, (5 \cdot 2) \cdot 3, (5 \cdot 2) \cdot 9\} = \{10, 30, 90\}.$

Nyní vyjádříme součin všech dělitelů čísla n . Protože n není druhou mocninou (jinak by muselo být dělitelné 2^2 a 5^2), je možné jeho dělitele rozdělit na dvojice se součinem n : $(1, n)$, $(2, n/2)$ atd., obecně $(d, n/d)$ pro všechny jeho dělitele $d < \sqrt{n}$. Když toto párování provedeme v zápisu součinu všech dělitelů n a nahradíme každou dvojici jejím součinem n , zjistíme, že součin všech dělitelů n je n umocněno na polovinu počtu svých dělitelů. Ilustrujme toto obecné zjištění na čísle 18. Jeho šest kladných dělitelů výše uvedeným postupem rozdělíme do tří dvojic $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. Jejich součin je roven $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 18 = (1 \cdot 18) \cdot (2 \cdot 9) \cdot (3 \cdot 6) = 18^3$.

Pro n ze zadání jsme výše dokázali, že počet jeho dělitelů je násobek čtyř – zapišme jej tedy jako $4k$ pro vhodné přirozené číslo k . Součin dělitelů n je pak roven $n^{2k} = (n^k)^2$, což je druhou mocninou přirozeného čísla.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Která z čísel $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9$, $3^3 \cdot 11^6$, 25^3 , $64 \cdot 75$ jsou druhými (nebo většími) mocninami celých čísel? [Přirozené číslo je k -tou mocninou, právě když všechny exponenty prvočísel v jeho prvočíselném rozkladu jsou násobky k . Konkrétně: $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9 = 2^{10} \cdot 7^4 \cdot 3^2 = (2^5 \cdot 7^2 \cdot 3)^2$ je druhá, ale žádná větší mocnina, $3^3 \cdot 11^6$ je (pouze) třetí mocninou, $25^3 = 5^6$ je šestou (a tedy i druhou a třetí) mocninou a $32 \cdot 125 = 2^5 \cdot 5^3$ není druhou nebo větší celočíselnou mocninou.]
- N2. Určete počet kladných dělitelů čísla 90. [Číslo 90 rozložíme na prvočinitele $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Výběrem těchto prvočísel se stejnými nebo nižšími (i nulovými) exponenty poskládáme všechny kladné dělitele 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90. Je jich tedy 12.]
- N3. Ukažte, že pokud je n čtvrtou mocninou přirozeného čísla, pak součin kladných dělitelů čísla n je druhou mocninou přirozeného čísla. [Označme τ počet kladných dělitelů n . Rozdělením těchto dělitelů do dvojic $(d, n/d)$ se součinem $n = a^4$ stejně jako v řešení soutěžní úlohy se jediný z nich páruje sám se sebou, a to $\sqrt{n} = a^2$. Celkový součin je tedy roven

$$a^2 \cdot (a^4)^{\frac{\tau-1}{2}} = (a^2)^\tau = (a^\tau)^2,$$

což je druhou mocninou.]

- D1. Zobecněte úlohu N2 – dokažte, že počet kladných dělitelů čísla s prvočíselným rozkladem $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$ je roven $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$. [Prvočíselný rozklad libovolného dělitele n obsahuje stejná prvočísla jako n se stejnými nebo nižšími (případně nulovými),

připomeňme konvenci $l^0 = 1$ pro každé $l \neq 0$) exponenty než mají příslušná prvočísla v rozkladu n . Určení těchto mocnin jednoznačně určuje dělitele a různé volby mocnin dávají různé dělitele. Jelikož u prvočísla p_i máme na výběr exponenty $0, 1, \dots, \alpha_i$ (tedy $\alpha_i + 1$ možností) a exponenty u různých prvočísel můžeme volit nezávisle (tzn. máme k dispozici všechny kombinace), je počet dělitelů skutečně roven uvedenému součinu.]

- D2. Součin všech kladných dělitelů čísla 15 je 15^2 . Která další čísla mají tu vlastnost, že součin všech jejich kladných dělitelů je druhou mocninou uvažovaného čísla? [Vyhovují čísla 1, pq a p^3 pro p, q libovolná různá prvočísla. Uvažme libovolné přirozené číslo n , které má v prvočíselném rozkladu alespoň tři prvočísla p_1, p_2 a p_3 v (kladných) mocninách α_1, α_2 a α_3 , tedy $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} m$, pro nějaké přirozené číslo m . Pak p_1 dělí n^2 v mocnině $2\alpha_1$. V součinu všech kladných dělitelů n se vyskytuje s exponentem alespoň

$$(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\alpha_1 \geq 4\alpha_1 > 2\alpha_1,$$

protože všechna čísla tvaru $p_1^{\alpha_1} d$, kde d je kladný dělitel $p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$, jsou kladnými děliteli n a z úlohy D1 víme, že takových dělitelů d je $(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$. Taková n tedy podmínce nevyhovují. Analogicky rozebereme případy, kdy n je dělitelné právě dvěma prvočíslly (vyjde, že obě musí být v rozkladu n v prvních mocninách, stejně jako u čísla 15). Pokud $n = p^\alpha$ je mocninou prvočísla, jeho kladní dělitele jsou čísla $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$. Jejich součin je roven $p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}$ a jeho druhá mocnina je rovna $p^{2\alpha}$. Porovnáním exponentů dostáváme $\alpha = 0$ (pak $n = 1$) nebo $\alpha = 3$ (pak $n = p^3$).]

- D3. Vyjádřete součet a součin všech kladných dělitelů čísla $n = p^\alpha q^\beta$ co nejjednodušeji pomocí prvočísel p, q a nezáporných celých čísel α, β . [Uvažme součin

$$(p^0 + p^1 + \dots + p^\alpha)(q^0 + q^1 + \dots + q^\beta).$$

Všimněme si, že pokud bychom jej roznásobili, dostali bychom právě součet všech dělitelů n . S pomocí známého vzorce pro rozklad výrazu pro $A^n - B^n$ můžeme ještě výsledek zapsat v uzavřeném tvaru jako

$$\frac{(p^{\alpha+1} - 1)(q^{\beta+1} - 1)}{(p - 1)(q - 1)}.$$

Hledejme nyní výraz pro součin všech dělitelů n . S jakou mocninou se v něm vyskytuje p ? Libovolný dělitel q^β můžeme vynásobit mocninou p (s exponentem mezi nulou a α) a získáme tak každý dělitel n . Mocnina p v součinu všech kladných dělitelů n je tedy rovna $(1 + \dots + \alpha)$ krát počet dělitelů čísla q^β , tedy $\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}$. Analogicky vyjádříme exponent u q a celý hledaný součin jako

$$p^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} q^{\frac{\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} = n^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2}}.$$

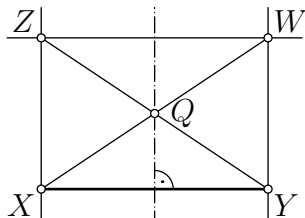
K témuž výsledku dochází jinou cestou i řešení soutěžní úlohy, i když jen pro n , která nejsou druhou mocninou. Stojí za povšimnutí, že vzorec zůstává v platnosti i v tomto případě.]

- D4. Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi. [B-65-I-4]
- D5. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla n je 20^{15} . Určete n . [B-64-II-1]

3. Na tabuli je nakreslena kružnice (bez středu) a na ní tři různé body A , B , C . Máme k dispozici křídlo a trojúhelník s ryskou bez měřítka. Ten nám umožňuje jen vést přímku libovolnými dvěma body a k dané přímce p vést kolmici daným bodem (ne nutně ležícím na p). Popište a zdůvodněte konstrukci středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC . (Ema Čudaiová)

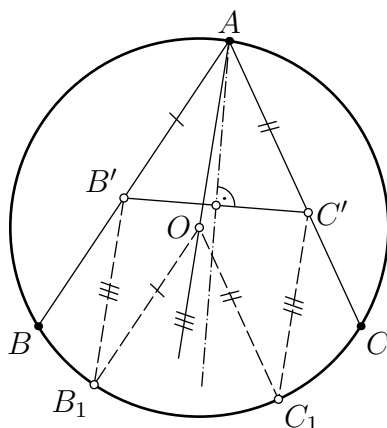
ŘEŠENÍ. Střed kružnice trojúhelníku vepsané leží v průsečíku os jeho vnitřních úhlů, jejich konstrukci si nyní popíšeme. Nejprve si uvědomíme, že osa vnitřního úhlu u vrcholu A protne kružnici opsanou v bodě, který je středem jejího oblouku BC (přesněji toho, který neobsahuje bod A), viz návodná úloha N3. Je tomu tak díky větě o obvodových úhlech, jejíž jedna varianta říká, že „díváme-li se z bodu ležícího na kružnici, pak úhly, pod kterými vidíme její shodné oblouky, jsou shodné“. Podaří-li se nám tedy sestrojit střed oblouků AB , BC , resp. CA (vždy uvažujeme ten neobsahující zbývajících vrchol trojúhelníku), přímka vedená jím a protějším vrcholem C , A , resp. B , bude příslušnou osou vnitřního úhlu. Střed obou oblouků BC sestrojíme jako průsečíky dané kružnice (tedy kružnice opsané trojúhelníku ABC) s osou strany BC , z nichž pak vybereme ten, který neobsahuje bod A a analogicky pro zbylé strany (pro získání průsečíku nám stačí jedna další osa úhlu).

Osu libovolné úsečky XY pomocí daných nástrojů sestrojíme následovně. Nejprve bodem X vedeme kolmici k přímce XY a na ní zvolíme bod Z různý od X . Kolmice na XZ vedená bodem Z protne kolmici k XY vedenou bodem Y v bodě W . Čtyřúhelník $XYZW$ je zřejmě obdélník a průsečík jeho úhlopříček Q leží na ose úsečky XY , kterou získáme jako kolmici na přímku XY vedenou bodem Q .



JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme alternativní konstrukci os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Hlavní myšlenkou následujícího postupu je najít na ramenech úhlu BAC body B' a C' stejně vzdálené od vrcholu A a osu tohoto úhlu pak sestrojit jako osu úsečky $B'C'$ (osu libovolné úsečky sestrojíme jako v závěru předchozího řešení). K nalezení těchto bodů využijeme schopnost vést daným bodem rovnoběžku s danou přímkou. Toho docílíme dvojnásobným opakováním konstrukce kolmice: chceme-li vést rovnoběžku s přímkou p bodem X , vedeme nejprve bodem X kolmici k přímce p (označme ji q) a následně vedeme bodem X kolmici na přímku q . Druhou ingrediencí bude střed kružnice O , který sestrojíme jako průsečík os stran trojúhelníku ABC . Bod O jakožto střed kružnice opsané splňuje $|OB| = |OC|$, stačilo by nám tedy tuto konfiguraci přenést k bodu A .

Bodem O vedme rovnoběžku s přímkou AB a její průsečík s kružnicí, který leží ve stejné polorovině určené přímkou AO jako B , označme B_1 . Dále sestrojme rovnoběžku bodem B_1 k přímce AO a její průsečík s přímkou AB označme B' . Výběrem vhodného průsečíku s kružnicí v prvním kroku jsme zaručili, že B' leží na polopřímce AB . Analogicky sestrojíme body C_1 a C' , viz obrázek. Všimněme si, že čtyřúhelníky AOB_1B'



a AOC_1C' jsou rovnoběžníky a připomeňme, že protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé. Proto platí $|AB'| = |OB_1| = |OC_1| = |AC'|$, což nám umožňuje ke konstrukci osy úhlu BAC použít postup ze začátku tohoto řešení.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Co je to kružnice trojúhelníku vepsané? Připomeňte si, jak lze klasickými prostředky (právkem a kružítkem) sestavit její střed a proč tato konstrukce funguje. [Je to kružnice dotýkající se všech tří stran trojúhelníka, její střed má proto od všech stejnou vzdálenost. Množinou bodů se stejnou vzdáleností od přímek AB a AC (připomeňme, že vzdáleností bodu X od přímky p myslíme vzdálenost bodu X od paty kolmice z X k p) je sjednocení os vnitřního a vnějšího úhlu BAC . Průsečík os vnitřních úhlů BAC a ABC má zřejmě stejnou vzdálenost od všech tří stran (jakožto přímek). Navíc leží uvnitř trojúhelníku, takže musí ležet i na ose vnitřního úhlu ACB . Všechny tři osy vnitřních úhlů trojúhelníku (jejichž konstrukce je standardní) se tedy protínají v jediném bodě, který je středem kružnice vepsané.*]
- N2. Pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze sestavte rovnoběžku k přímce p bodem X , který na p neleží. [Nejprve sestavíme kolmici q k přímce p procházející bodem X . Poté sestavíme kolmici k přímce q procházející bodem X , která je hledanou rovnoběžkou.]
- N3. Dokažte následující tvrzení: Osa vnitřního úhlu u vrcholu A trojúhelníku ABC protne kružnici jemu opsanou ve středu jejího oblouku BC neobsahujícího bod A . [Tvrzení plyne přímo z věty o obvodových úhlech. K tomuto tématu doporučujeme např. studijní text <https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/tkadlec.pdf>.]
- D1. Dokažte následující tvrzení: Osa vnějšího úhlu u vrcholu A trojúhelníku ABC protne kružnici jemu opsanou ve středu jejího oblouku BC obsahujícího bod A . [Označme zkoumaný průsečík X . Z úlohy N3 víme, že osa příslušného vnitřního úhlu protne kružnici opsanou ve středu M jejího oblouku BC neobsahujícího bod A . Osa vnějšího úhlu je na ni kolmá, z Thaletovy věty tedy plyne, že bod X tvoří s bodem M průměr kružnice, zkoumaný průsečík X je proto středem druhého oblouku BC .]
- D2. K dané kružnici sestavte střed pouze pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze. [Zvolme na kružnici k libovolné dva různé body A a B . Bodem B vedme kolmici p na přímku AB . Průsečík přímky p a kružnice k různý od bodu B označme C . (Pokud takový náhodou neexistuje, položíme $C = B$.) Konstrukci zopakujeme pro jiné dva body A' , B' (z nich sestavíme C'). Průsečík přímek AC a $A'C'$ označme S . Jelikož úhly ABC a $A'B'C'$ jsou pravé, podle Thaletovy věty jsou AC a $A'C'$ průměry kružnice k a proto je bod S hledaným středem. Další možností je sestavit střed jako průsečík os dvou různých

* Podobně se ukáže, že průsečík os dvou *vnějších* úhlů leží na ose *vnitřního* úhlu u zbylého vrcholu. Takto sestrojené tři body jsou středy kružnic *připsaných*, které se také dotýkají všech tří stran trojúhelníku (jakožto přímek), leží však mimo trojúhelník.

tětiv dané kružnice (konstrukce osy úsečky je popsána v řešení soutěžní úlohy). Je ovšem třeba zajistit, aby osy tětiv nesplynuly, např. volbou dvou různých tětiv se společným krajním bodem.]

- D3. V rovině je dána kružnice k se středem S a poloměrem 1. Pouze pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze sestrojte úsečku o délce $\sqrt{13}$. [Protože $13 = 2^2 + 3^2$, podle Pythagorovy věty je $\sqrt{13}$ délka přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách 2 a 3. Pro jeho konstrukci vedeme bodem S polopřímku a a polopřímku b kolmou na a . Průsečíky polopřímek a , b s kružnicí k označíme postupně A_1 , B_1 . Bod S zobrazíme středově souměrně (návod je uveden v závěru řešení) podle bodu A_1 na bod A_2 a následně bod A_1 zobrazíme podle bodu A_2 na bod A_3 . Podobně zobrazíme bod S přes střed B_1 na bod B_2 . Trojúhelník B_2SA_3 je pravoúhlý s délkami odvěsen 2 a 3, tedy $|A_2A_3| = \sqrt{13}$. Obraz bodu X podle bodu Y (jakožto středu souměrnosti) sestrojíme následovně: Pomocí kolmic zkonstruujeme obdélník $XYZW$. Průsečík přímky XY a rovnoběžky s jeho úhlopříčkou WY vedené bodem Z je hledaným středovým obrazem.]
- D4. Máme pravítko bez měřítka, které nám umožňuje vést přímku dvěma danými body a sestrojit kolmici na danou přímku *jejím* daným bodem. Zjistěte, zda pomocí těchto operací dokážeme sestrojit kolmici na danou přímku z daného bodu ležícího mimo tuto přímku. [KMS 2010/11, 2. zimná séria, úloha 7]

4. Reálná čísla x, y splňují nerovnosti $xy \geq x + y > 0$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet $x + y$? (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ (užitím AG-nerovnosti). Pokud by x nebo y bylo rovno nule, pak by obě nerovnosti zjevně nemohly platit najednou. Stejně tak nemohou být obě čísla záporná, protože potom bychom měli $x + y < 0$, a nemůže být jedno kladné a druhé záporné, protože potom $xy < 0$. Obě čísla tedy musí být kladná.

Rozmysleme si, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí nerovnost

$$(x + y)^2 \geq 4xy,$$

ekvivalentními úpravami ji totiž můžeme přepsat na

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0,$$

což zřejmě platí pro libovolná reálná čísla x a y . Předpokládejme nyní, že kladná čísla x, y splňují nerovnosti ze zadání. Pak platí

$$(x + y)^2 \geq 4xy \geq 4(x + y),$$

což po vydělení kladným číslem $x + y$ dává $x + y \geq 4$. Tato hodnota je dosažitelná pro $x = y = 2$, takže hledaná nejmenší hodnota součtu $x + y$ je 4.

POZNÁMKA. Nerovnost $(x + y)^2 \geq 4xy$, kterou jsme v řešení výše dokázali a využili, je variantou tzv. AG-nerovnosti pro dvě čísla, viz návodná úloha N1. K tématu nerovností je mnoho studijních textů, jedním z obsáhlejších je např. <https://prase.cz/archive/29/9.pdf>.

JINÉ ŘEŠENÍ (elementární). Stejně jako v předchozím řešení zdůvodníme, že x i y musí být kladná čísla. Pokud první zadaná nerovnost platí ostře, t.j. pokud

$$xy > x + y, \quad \text{neboli} \quad \frac{xy}{x + y} = r > 1,$$

můžeme obě čísla vynásobit nějakým číslem $t \in (0, 1)$ a dostat tak dvojici (tx, ty) , která splňuje zadanou podmínku (s rovností v první nerovnosti), ale má nižší součet $tx + ty = t(x + y)$. Vskutku, podmínka ze zadání pro tuto dvojici čísel se dá napsat jako

$$t^2 xy \geq t(x + y) \quad \text{nebo ekvivalentně} \quad t \frac{xy}{x + y} = tr \geq 1,$$

takže volba $t = \frac{1}{r} \in (0, 1)$ funguje a v zadané nerovnosti $xy \geq x + y$ při ní opravdu nastává rovnost. Stačí se tedy omezit na dvojice kladných čísel (x, y) splňujících $xy = x + y$. Z této rovnosti vyjádříme $y = \frac{x}{x-1}$ (pokud $x = 1$, rovnost nabývá tvaru $1 \cdot y = 1 + y$, a tedy nemůže nastat) a dosazením získáme $x + y = \frac{x^2}{x-1}$. Hledáme tedy minimum výrazu $\frac{x^2}{x-1}$ pro všechna kladná čísla x taková, že i $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ je kladné, tedy pro x z intervalu $(1, \infty)$. Jinými slovy hledáme největší reálné číslo m splňující $\frac{x^2}{x-1} \geq m$ pro všechna $x > 1$. Nerovnost ekvivalentně přepíšeme jako $x^2 - mx + m \geq 0$ a její levou stranu upravíme na čtverec*:

$$x^2 - mx + m = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m \geq 0.$$

* Alternativou je použití diskriminantu podobně jako v následujícím řešení.

Tato nerovnost platí pro všechna reálná x právě tehdy, když $m - \frac{m^2}{4} \geq 0$ (protože můžeme zvolit $x = \frac{m}{2}$) neboli $m \leq 4$. Číslo 4 je tedy minimální hodnotou výrazu $\frac{x^2}{x-1}$ na $\mathbb{R}$. Na intervalu $(1, \infty)$ by minimální hodnota mohla být větší, ale dosazením $x = 2$ vidíme, že tomu tak není, protože $\frac{2^2}{2-1} = 4$. Minimální hodnota výrazu $\frac{x^2}{x-1}$ na intervalu $(1, \infty)$, a tedy i součtu $x + y$, je proto 4.

POZNÁMKA. Právě dokončené řešení nevyužívá žádné pokročilejší znalosti nebo „triku“ (snad až na závěrečnou úpravu na čtverec), ale je tomu tak za cenu poměrně dlouhých a komplikovaných myšlenkových úvah. Zejména v části redukcí úlohu na případ $x = y$ je snadné udělat chybu, resp. není snadné příslušné kroky korektně zdůvodnit. Přesto bývá podobný přístup užitečný (když nás ten správný trik zkrátka nenapadne). Podrobně je rozebrán v řešení úlohy [B-74-I-6] a příslušných návodných úlohách (zejména N5 až N8).

JINÉ ŘEŠENÍ (pomocí kvadratické rovnice). Označme $s = x + y$ a přeformulujme úlohu následujícím způsobem: *Pro které nejmenší reálné číslo s existují reálná čísla x, y splňující*

$$xy \geq x + y = s > 0 ?$$

Ihned vidíme, že s musí být kladné. Vyjádřením a dosazením $y = s - x$ dostáváme podmínku

$$x(s - x) \geq s,$$

kteřou dále upravíme na nerovnost pro kvadratický trojčlen

$$x^2 - sx + s \leq 0$$

a ptáme se, pro jaké nejmenší s má tato nerovnice (v proměnné x) řešení. Kvadratický trojčlen s kladným vedoucím koeficientem nabývá alespoň jedné nekladné hodnoty právě když příslušná kvadratická rovnice má alespoň jeden reálný kořen, což je ekvivalentní tomu, že její diskriminant

$$D = s^2 - 4s \geq 0$$

je nezáporný. Zkrácením kladným číslem s dostáváme ihned $s \geq 4$. Minimální možná hodnota součtu je tedy 4 a vzhledem k použitému řetězci ekvivalencí není nutná žádná zkouška (pro $s = 4$ bychom ale ve shodě s ostatními řešeními dostali jedinou vyhovující dvojici $x = y = 2$).

JINÉ ŘEŠENÍ. Podobně jako v návodné úloze N3 nechť pro reálná čísla c a d platí $c = (x + y)/2$ a $d = (x - y)/2$. Potom $x = c + d$ a $y = c - d$. Dále platí $x + y = 2c$ a $xy = c^2 - d^2$. Úlohu můžeme nyní přeformulovat: *Pro které nejmenší reálné číslo c existuje reálné číslo d tak, že platí $c^2 - d^2 \geq 2c > 0$?* Podle druhé nerovnosti platí $c > 0$. Jelikož d^2 je nezáporné číslo, z první nerovnosti nutně platí $c^2 \geq 2c$. Proto $c \geq 2$. Čísla $c = 2$ a $d = 0$ zřejmě vyhovují přeformulované úloze, proto nejmenší možná hodnota součtu $x + y$ jsou $2c = 4$, to nastane pro $x = y = 2$.

NÁVODNÉ A DOPLŇJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG-nerovnost) nezáporných reálných čísel a, b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

a určete, kdy v ní nastává rovnost. [Díky nezápornosti existují čísla $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ a s jejich pomocí můžeme nerovnost ekvivalentně přepsat jako $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Tato nerovnost zřejmě platí pro všechny dvojice $a, b \geq 0$ a rovnost v ní nastává právě když $a = b$.]

- N2. Necht a, b jsou kladná reálná čísla se součinem 10. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$ a zjistěte, pro jaká a, b se nabývá. [Z AG-nerovnosti máme $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{10}$ a rovnost se nabývá právě pro $a = b = \sqrt{10}$. Alternativně můžeme dosadit $b = \frac{10}{a}$ a hledat minimum m výrazu

$$a + b = a + \frac{10}{a} \geq m.$$

Vynásobíme obě strany poslední nerovnosti a a získanou ekvivalentní (zde využíváme, že a je kladné) nerovnost $a^2 - am + 10 \geq 0$, buď upravíme na čtverec a postupujeme jako v 2. řešení soutěžní úlohy nebo, podobně jako ve 3. řešení soutěžní úlohy, využijeme toho, že diskriminant trojčleny na levé straně (v proměnné a) musí být nekladný. Oběma způsoby dostaneme $m^2 \leq 4 \cdot 10$ (a hledali jsme největší takové m , takže $m = 2\sqrt{10}$) i podmínku pro nabývání minima $a = \frac{m}{2} = \sqrt{10}$.]

- N3. Necht reálná čísla a, b a konstanta K splňují $a + b = K$. V závislosti na K určete největší možnou hodnotu součinu ab a zjistěte, pro jaká a, b se nabývá. [Ukážeme dvě řešení, první založené na intuitivním pozorování, že čím jsou čísla a, b dále od sebe, tím menší je jejich součin. Označme $d = a - \frac{K}{2} = \frac{K}{2} - b$. Pak

$$ab = \left(\frac{K}{2} + d\right) \left(\frac{K}{2} - d\right) = \frac{K^2}{4} - d^2 \leq \frac{K^2}{4}$$

a rovnost nastává pro $d = 0$, neboli pro $a = b = \frac{K}{2}$. Podobným způsobem lze dokázat i AG-nerovnost. Alternativně můžeme dosadit $b = K - a$ a hledat maximum výrazu $ab = a(K - a)$ úpravou na čtverec (jako v 2. řešení soutěžní úlohy) nebo pomocí kvadratické funkce, a to buď označením neznámého maxima a využitím diskriminantu (jako v 3. řešení soutěžní úlohy), nebo si všimneme, že $f(a) = a(K - a) = -a^2 + Ka$ je kvadratický trojčlen se záporným vedoucím koeficientem, takže ze symetrie paraboly nabývá maxima mezi kořeny, tedy v hodnotě $\frac{K+0}{2}$.*]

- D1. Pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ platí nerovnost

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geq 4.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [59-C-II-2]

- D2. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

kde x je libovolné reálné číslo. Pro která x výraz V této hodnoty nabývá? [64-B-II-2]

- D3. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

[63-B-I-2]

- D4. Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 + ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b . [70-B-II-1]

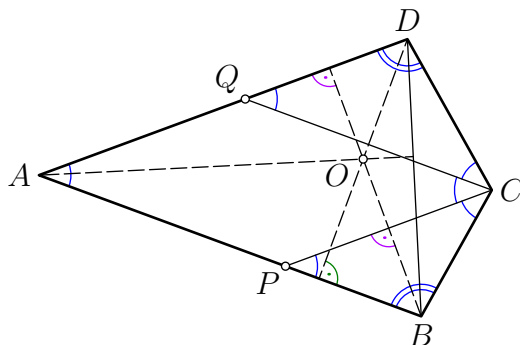
* Povšimněte si, že tvrzení úloh N1 a N2 jsou si velmi blízká, ovšem s tím podstatným rozdílem, že v N1 musíme předpokládat $a, b, K > 0$.

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$ a $|\sphericalangle BCD| = 3|\sphericalangle BAD|$. Body P a Q leží po řadě na úsečkách AB a AD tak, že $APCQ$ je rovnoběžník. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku CPQ . Dokažte, že $AO \perp BD$. (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Označme $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, pak z druhé rovnosti ze zadání máme $|\sphericalangle BCD| = 3\alpha$. Dopočítáním úhlů ve čtyřúhelníku $ABCD$ získáme pomocí první zadané rovnosti vztah

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = \frac{360^\circ - 3\alpha - \alpha}{2} = 180^\circ - 2\alpha.$$

Z rovnoběžnosti $PC \parallel AQ$ plyne $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$, trojúhelník BCP je tedy rovnoramenný (se základnou PC). Analogicky dokážeme, že i trojúhelník DCQ je rovnoramenný (se základnou QC).



Nyní ukážeme, že O je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABD . Osa úsečky CP prochází vrcholem B rovnoramenného trojúhelníku BCP i středem O kružnice opsané trojúhelníku CPQ . Přímka BO je tak kolmá k přímce PC a tedy i k s ní rovnoběžné přímce AD . Analogicky ukážeme, že $DO \perp AB$, čili O je skutečně průsečíkem výšek v trojúhelníku ABD , z čehož už dokazované tvrzení přímo plyne.

POZNÁMKA. K rovnoramennosti trojúhelníků BCP a DCQ se lze dobrat i jiným způsobem: Protože $|\sphericalangle BPC| = \alpha = |\sphericalangle CQD|$ a $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle QDC|$, jsou trojúhelníky PBC a QDC podobné podle věty *uu*. Tedy $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle DCQ|$. Zároveň součet těchto dvou (shodných) úhlů je 2α , protože $|\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle PCQ| = 3\alpha - \alpha$. Tedy $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle DCQ| = \alpha$ a trojúhelníky BCP a DCQ jsou rovnoramenné.

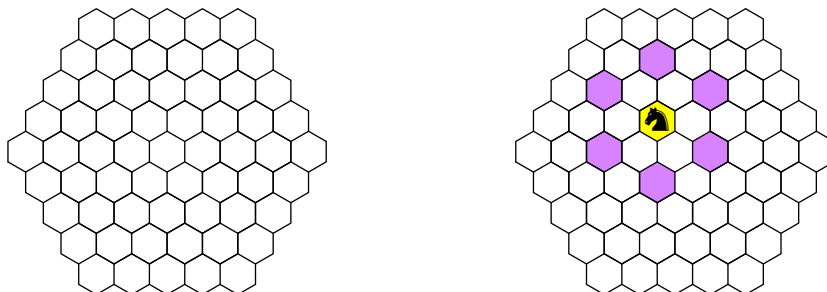
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30^\circ$, $|\sphericalangle PBC| = 40^\circ$, $|\sphericalangle BCP| = 20^\circ$ a $|\sphericalangle PCA| = 30^\circ$. Ukažte, že přímka AP je kolmá k přímce BC . [Dopočítáním úhlů zjistíme, že přímky BP a CP jsou výšky, přímka AP tedy musí být třetí výškou. Skutečně, pro průsečík Q přímky BP a strany AC platí $|\sphericalangle BQC| = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$, analogicky dopočítáme, že přímka PC je kolmá k přímce AB .]
- N2. V trojúhelníku ABC označme M , N a P po řadě středy stran BC , CA a AB . Dokažte, že průsečík výšek trojúhelníku MNP je současně středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . [Osy stran trojúhelníku ABC splývají s výškami v trojúhelníku MNP .]
- D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M . Předpokládejme, že M leží na základně AB . Dokažte, že přímka MP je osou úhlu CMD . [Trojúhelník BMD je rovnoramenný se základnou BD , takže platí $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle MBD| = |\sphericalangle CDB|$, přičemž poslední rovnost plyne z rovnoběžnosti základů]

- lichoběžníku $AB \parallel CD$. Tedy DP je osou vnitřního úhlu u vrcholu C v trojúhelníku CDM . Podobně ukážeme, že přímka CP je osou vnitřního úhlu u vrcholu C . Bod P jakožto jejich průsečík je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM , a tedy přímka MP je opravdu osou úhlu CMD .*]
- D2. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD . Dokažte, že $AL \perp BL$. [C-71-S-2]
- D3. V trojúhelníku ABC narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu A a její průsečík se stranou BC označíme D . Na straně AB najdeme takový bod M , že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky AM a DM mají stejnou délku. [Přímka AD je osou úhlu u vrcholu A , takže $|CAD| = |MAD|$. Kromě toho úhly CAD a MDA jsou střídavé, protože $MD \parallel AC$. Trojúhelník AMD je tudíž rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.]
- D4. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC . Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [B-71-I-2]

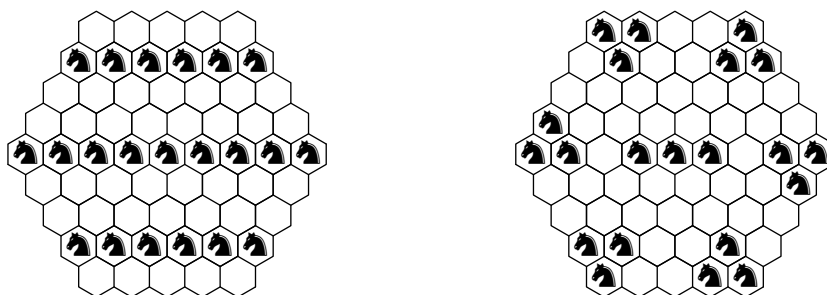
* Jedná se o mírně přeformulovanou úlohu z letošního domácího kola C-75-I-5.

6. Hrací plán na obrázku vlevo se skládá z 61 pravidelných šestiúhelníků se stranou délky 1.* Na každém jeho políčku může stát nejvýše jeden jezdec. Dva jezdci se ohrožují právě tehdy, když stojí na políčkách se středy vzdálenými přesně 3 (políčka ohrožená jezdce jsou na obrázku vpravo vybarvená). Kolik nejvýše jezdců můžeme umístit na tento plán tak, aby se žádní dva neohrožovali?



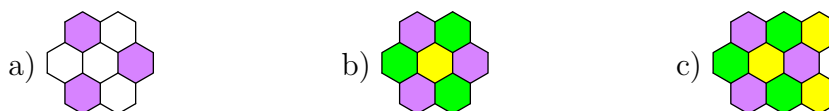
(Jozef Rajník)

ŘEŠENÍ. Když jezdci zaplníme druhý, pátý a osmý řádek plánu, umístíme tak celkem $6+9+6=21$ neohrožujících se jezdců, viz obrázek 1 vlevo, vedle je znázorněn jiný možný způsob rozmístění stejného počtu jezdců.



Obr. 1

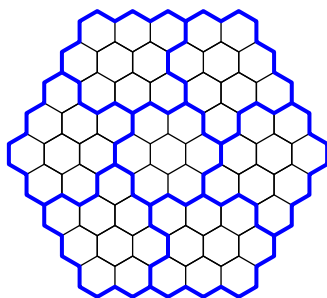
Nyní dokážeme, že na plán lze umístit nanejvýš 21 jezdců. Základním pozorováním je, že existují trojice políček, jejichž středy tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky 3 (vybarvená políčka na obrázku 2 a)). Na těchto třech políčkách může stát nejvýše jeden jezdec. Proto v útvech na obrázcích 2 b) a 2 c) mohou být v každém nejvýše tři jezdci, a to na každé barvě nejvýše jeden.



Obr. 2

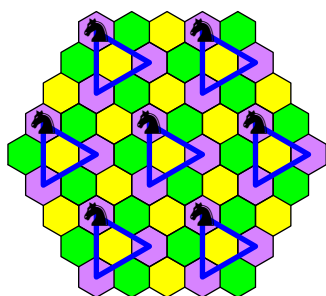
Celý plán lze rozdělit na sedm útvarů typů 2 b) a 2 c) podle obrázku 3, čímž je počet jezdců omezen na nejvýše $7 \cdot 3 = 21$, což jsme chtěli dokázat.

* Hrací plány najdete na https://www.matematickaolympiada.cz/media/3855053/hrplany_b6.pdf

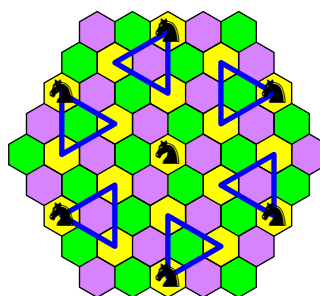


Obr. 3

JINÉ ŘEŠENÍ. Obarvíme plán třemi barvami podle obrázků 4 a 5. Toto obarvení má tu vlastnost, že jezdec umístěný na libovolné políčko ohrožuje jen políčka stejné barvy, čímž jsme si vlastně úlohu rozdělili na tři nezávislé úlohy. Fialová políčka, kterých je 21, je možné rozdělit do sedmi trojic podle obrázku 4 tak, že nejvýše jedno z políček každé trojice může obsahovat jezdce. Analogicky rozdělíme i 21 zelených políček (obarvení je symetrické v tom smyslu, že zelená políčka přejdou na fialová rotací kolem středu plánu o 60°). Žlutá políčka, kterých je 19, rozdělíme podle obrázku 5 na 6 trojic a středové políčko. Dostaneme tak odhad na nejvyšší možný počet jezdců $7 + 7 + (6 + 1) = 21$ a zároveň návod na několik různých optimálních konstrukcí – např. jezdce umístíme na vyznačená políčka.



Obr. 4



Obr. 5

POZNÁMKA. Alternativní řešení výše poskytuje způsob, jak určit počet všech možných optimálních rozmístění jednadvaceti jezdců. Z každé trojice políček musí být alespoň jedno obsazeno jezdcem a totéž platí pro středové žluté políčko. Výběrem jedné ze dvou možností v jedné ze žlutých trojic je již zbytek rozmístění na žlutých políčkách jednoznačně určen, máme tedy dvě možnosti. Na fialových políčkách je rozbor možností složitější, různými způsoby se lze dostat k jejich celkovému počtu 117, stejně jako pro zelená políčka. Celkem tedy máme $2 \cdot 117^2 = 27378$ možných rozmístění.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Vyjádřete obecně vzdálenost středů dvou políček na stejném řádku hracího plánu a vyvoďte z výsledku, že jsou to necelá (dokonce iracionální) čísla. [Jsou to sudé násobky délky výšky v rovnostranném trojúhelníku o straně jedna, neboli čísla tvaru $2k \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}k$ pro k celé nezáporné. Připomeneme důkaz známého faktu (v řešeních MO je třeba možné jej používat bez důkazu), že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo: pokud by $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ pro nějaká přirozená čísla p, q , tak umocněním dostaneme $3q^2 = p^2$. Číslo p^2 obsahuje jakožto druhá mocnina ve svém prvočíselném rozkladu trojku v sudé (i nulové) mocnině, zatímco rozklad $3q^2$ obsahuje ze stejného důvodu lichý počet trojek. Rovnost těchto čísel tedy není možná.]

- N2. Jezdec stojí na středovém políčku hracího plánu. Na která políčka dokáže doskákat konečným počtem skoků? Jak tomu bude v případě, že jezdec stojí v pravém horním rohu? [Plán je možné obarvit několika málo barvami tak, že jezdec umístěný na políčka jedné barvy se může opakovanými skoky na políčka, která aktuálně ohrožuje, dostat pouze na políčka stejné barvy. Využijeme obarvení plánu z alternativního řešení soutěžní úlohy, odkud víme, že jezdec nemůže skočit mezi políčky různých barev. Zároveň se můžeme snadno přesvědčit, že z libovolného políčka jedné barvy lze doskákat na libovolné jiné políčko této barvy. Ze středového políčka může tedy jezdec doskákat právě na všechna žlutá políčka a z pravého horního rohu na všechna zelená políčka.]
- N3. Dokažte, že na šachovnici 8×8 lze umístit nejvýše 16 králů tak, aby se navzájem neohrožovali. [Šachovnici rozdělíme na 16 čtverců 2×2 , na každý z nich můžeme umístit nejvýše jednoho krále, proto je králů nejvýše 16. Šestnáct králů už na šachovnici umístit umíme, například na ta pole, jejichž obě souřadnice jsou liché.]
- D1. Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici 8×8 tak, aby se střelci navzájem neohrožovali. [B-69-I-6]
- D2. Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali? [Sedm. Na šachovnici uvažujeme diagonály rovnoběžné s bílou hlavní diagonálou. Včetně jí je jich právě 7. Na každou můžeme umístit nejvýše jednoho střelce. Protože každé bílé pole leží na některé z těchto diagonál, můžeme tak na šachovnici umístit nejvýše 7 střelců. Vyhovující umístění 7 střelců můžeme vybrat například tak, že budou v počtech 4 a 3 v krajních sloupcích šachovnice.]
- D3. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3 . Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. [58-B-I-4]
- D4. Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď tvaru L-tetromina. Můžeme se zeptat na libovolné pole desky a pokud loď zasáhneme, hra končí. a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí dotázat, abychom měli jistotu zásahu lodě. b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává. [58-B-II-2]