I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zvonkohra na nádvoří hraje v každou celou hodinu krátkou skladbu, a to počínaje 8. a konče 22. hodinou. Skladeb je celkem osmnáct, v celou hodinu se hraje vždy jen jedna a po odehrání všech osmnácti se začíná ve stejném pořadí znovu. Olga a Libor byli na nádvoří v pondělí v 15 hodin. Ten samý týden si přišli zvonkohru poslechnout ještě jednou v poledne, k jejich zklamání však hrála ta samá melodie, kterou slyšeli v pondělí.

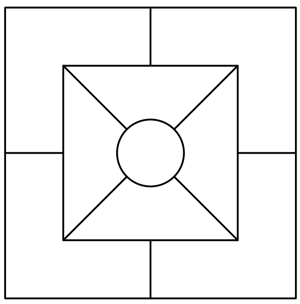
Který den byla Olga s Liborem na nádvoří podruhé? (*L. Šimůnek*)

Z5–I–2

V každém z rohových polí vnějšího čtverce má být napsáno jedno z čísel 2, 4, 6 a 8, přičemž v různých polích mají být různá čísla. Ve čtyřech polích vnitřního čtverce mají být součiny čísel ze sousedících polí vnějšího čtverce. V kruhu má být součet čísel ze sousedících polí vnitřního čtverce.

Která čísla mohou být napsána v kruhu? Určete všechny možnosti.

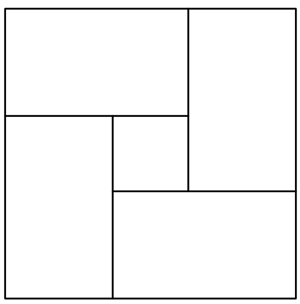
(*M. Dillingerová*)



Z5–I–3

Na obrázku je čtvercová dlaždice se stranou délky 10 dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod celé dlaždice.

Určete rozměry obdélníků. (*K. Pazourek*)



Z5–I–4

Prodavač vánočních stromků prodával smrčky po 220 Kč, borovičky po 250 Kč a jedličky po 330 Kč. Ráno měl stejný počet smrčků, jedliček a borovic. Večer měl všechny stromky prodané a celkem za ně utržil 36 000 Kč.

Kolik stromků toho dne prodavač prodal? (*M. Krejčová*)

Z5–I–5

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby součet doplněných číslic byl lichý a aby platila následující rovnost:

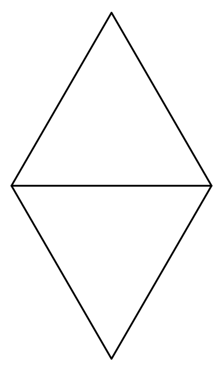
$$42 \times {*}8 = 2{*}{*}{*}$$

(*L. Hozová*)

Z5–I–6

Jiřka sestrojila dva shodné rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku. Dále chce sestrojit všechny kružnice, které budou mít střed v některém z vrcholů a budou procházet některým jiným vrcholem některého z trojúhelníků.

Sestrojte a spočítejte všechny kružnice vyhovující Jiřčiným požadavkům. (*K. Pazourek*)



66. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Jana a David trénují sčítání desetinných čísel tak, že každý z nich napíše jedno číslo, a tato dvě čísla pak sečtou. Poslední příklad jim vyšel 11,11. Davidovo číslo mělo před desetinnou čárkou stejný počet číslic jako za ní, Janino číslo také. Davidovo číslo bylo zapsáno navzájem různými číslicemi, Janino číslo mělo právě dvě číslice stejné.

Určete největší možné číslo, které mohl napsat David. (*M. Petrová*)

Z6–I–2

Pan Kostkorád vlastnil zahradu obdélníkového tvaru, na které postupně dláždil chodníky z jedné strany na druhou. Chodníky byly stejně široké, křížily se na dvou místech a jednou vydlážděná plocha se při dalším dláždění přeskakovala.

Když pan Kostkorád vydláždil chodník rovnoběžný s delší stranou, spotřeboval $228\,\mathrm{m}^2$ dlažby. Poté vydláždil chodník rovnoběžný s kratší stranou a spotřeboval $117\,\mathrm{m}^2$ dlažby. Nakonec vydláždil ještě jeden chodník rovnoběžný s prvním chodníkem, tentokrát spotřeboval jen $219\,\mathrm{m}^2$ dlažby.

Určete rozměry Kostkorádovy zahrady. (*M. Petrová*)

Z6–I–3

Mnohonožka Mirka sestává z hlavy a několika článků, na každém článku má jeden pár nohou. Když se ochladilo, rozhodla se, že se obleče. Proto si na třetím článku od konce a potom na každém dalším třetím článku oblékla ponožku na levou nožku. Podobně si na pátém článku od konce a potom na každém dalším pátém článku oblékla ponožku na pravou nožku. Poté zjistila, že na 14 článcích jí zůstaly obě nohy bosé.

Zjistěte, kolik celkem nohou mohla mít mnohonožka Mirka; určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Z6–I–4

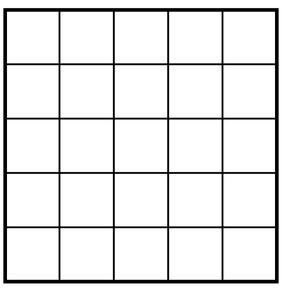
Čtyři rodiny byly na společném výletě. V první rodině byli tři sourozenci, a to Alice, Bětka a Cyril. V druhé rodině byli čtyři sourozenci, a to David, Erika, Filip a Gábina. V třetí rodině byli dva sourozenci, a to Hugo a Iveta. Ve čtvrté rodině byli tři sourozenci, a to Jan, Karel a Libor. Cestou se děti rozdělily do skupin tak, že v každé skupině byly všechny děti se stejným počtem bratrů a nikdo jiný.

Jak se mohly děti rozdělit? Určete všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

Z6–I–5

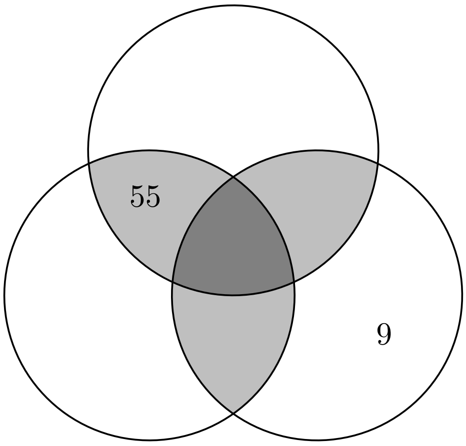
Jirka si nakreslil čtvercovou síť s 25 čtverečky, viz obrázek. Poté chtěl každý čtvereček vybarvit tak, aby stejně vybarvené čtverečky neměly společný žádný vrchol.

Kolik nejméně barev musel Jirka použít? (*M. Dillingerová*)



Z6–I–6

Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček: (*T. Salčák*)

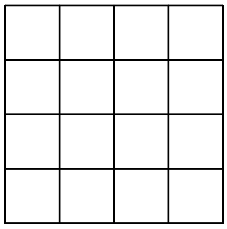


66. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Čtverec se stranou 4 cm je rozdělen na čtverečky se stranou 1 cm jako na obrázku. Rozdělte čtverec podél vyznačených čar na dva útvary s obvodem 16 cm. Najděte alespoň tři různá řešení (tzn. taková tři řešení, aby žádný útvar jednoho řešení nebyl shodný s žádným útvarem jiného řešení). (*V. Hucíková*)



Z7–I–2

Na lyžařské soustředění přijeli 4 kamarádi ze 4 světových stran a vedli následující rozhovor.

Karel: „Nepřijel jsem ze severu ani z jihu.“

Mojmír: „Zato já jsem přijel z jihu.“

Pepa: „Přijel jsem ze severu.“

Zdena: „Já z jihu nepřijel.“

Víme, že jedna výpověď není pravdivá. Určete, která to je.

Kdo tedy přijel ze severu a kdo z jihu? (*M. Volfová*)

Z7–I–3

Anička má 50 Kč, Anežka má 46 Kč a za všechny peníze chtějí koupit zákusky na rodinnou oslavu. Rozhodují se mezi dortíky a větrníky: větrník je o 4 Kč dražší než dortík a dortíků by se dalo za všechny peníze koupit o třetinu více než větrníků.

Kolik stojí každý ze zákusků? (*M. Volfová*)

Z7–I–4

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby následující zápis součinu dvou čísel byl platný:

$$\begin{array}{r}
\,\,* \\
\times\ \ *\,*\,* \\
\hline
\,\,*\,* \\
4\,9\,4\,9\ \ \ \\
\,\,*\ \ \ \ \ \ \\
\hline
\,\,*\,4\,*\,*
\end{array}$$

(*L. Hozová*)

Z7–I–5

Je dán trojúhelník ABC se stranami $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 10\,\mathrm{cm}$ a s úhlem ABC o velikosti $120°$. Narýsujte všechny body X tak, aby platilo, že trojúhelník BCX je rovnoramenný a současně trojúhelník ABX je rovnoramenný se základnou AB.

(*E. Semerádová*)

Z7–I–6

Určete, pro kolik přirozených čísel větších než 900 a menších než 1 001 platí, že ciferný součet ciferného součtu jejich ciferného součtu je roven 1. (*E. Semerádová*)

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Tři kamarádky veverky spolu vyrazily na sběr lískových oříšků. Zrzečka jich našla dvakrát víc než Pizizubka a Ouška dokonce třikrát víc než Pizizubka. Cestou domů si povídaly a přitom louskaly a jedly své oříšky. Pizizubka snědla polovinu všech oříšků, které nasbírala, Zrzečka třetinu všech svých oříšků a Ouška čtvrtinu těch svých. Doma veverky zjistily, že jim dohromady zbylo 196 oříšků.

Kolik oříšků našla každá z veverek? (*M. Petrová*)

Z8–I–2

Na každé stěně pravidelného osmistěnu je napsáno jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, přičemž na různých stěnách jsou různá čísla. U každé stěny Jarda určil součet čísla na ní napsaného s čísly tří sousedních stěn. Takto dostal osm součtů, které také sečetl.

Jakých hodnot může tento výsledný součet nabývat? (*J. Zhouf*)

Z8–I–3

Při střelbě z luku se mimo jiné sleduje výkonnost střelce. Ta se počítá tak, že se ze všech pokusů odebere jeden nejlepší a jeden nejhorší a z hodnocení zbylých se spočítá aritmetický průměr.

Kamarádi Petr, Jirka, Michal a Zdeněk stříleli po jenom šípu ve čtyřech kolech. Každá střela byla hodnocena celým číslem od 0 do 10. V každém kole byl součet hodnocení všech chlapců 32 bodů, ale ani v jednom kole neměli žádní dva chlapci stejné hodnocení.

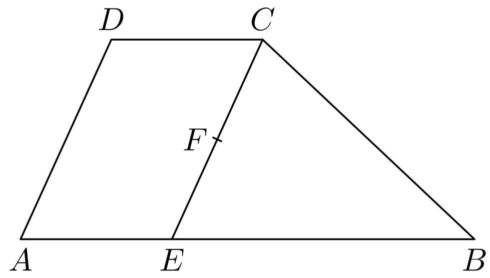
V následující tabulce jsou vyplněny jen některé údaje z popsaného utkání, doplňte ty chybějící. (*M. Dillingerová*)

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr				5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5		8
Zdeněk					8,5
celkem	32	32	32	32	–

Z8–I–4

Lichoběžník $ABCD$ je úsečkou CE rozdělen na trojúhelník a rovnoběžník, viz obrázek. Bod F je středem úsečky CE, přímka DF prochází středem úsečky BE a obsah trojúhelníku CDE je $3\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah lichoběžníku $ABCD$. (*E. Semerádová*)



Z8–I–5

Maminka donesla 10 zákusků tří druhů: kokosek bylo méně než laskonek a nejvíc bylo karamelových kostek. Josef si vybral dva zákusky různých druhů, Jakub udělal totéž a na Jana zbyly pouze zákusky stejného druhu.

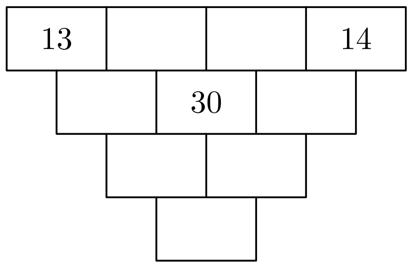
Kolik kokosek, laskonek a karamelových kostek maminka donesla? (*V. Hucíková*)

Z8–I–6

Každá cihlička následující pyramidy obsahuje jedno číslo. Kdykoli to je možné, je číslo v každé cihličce nejmenším společným násobkem čísel ze dvou cihliček ležících přímo na ní.

Které číslo může být v nejspodnější cihličce? Určete všechny možnosti.

(*A. Bohiniková*)



I. kolo kategorie Z9

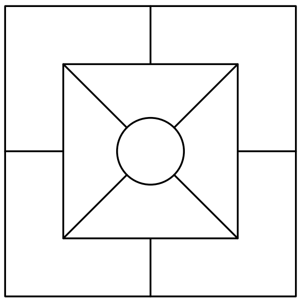
Z9–I–1

Ve všech devíti polích obrazce mají být vyplněna přirozená čísla tak, aby platilo:

- každé z čísel 2, 4, 6 a 8 je použito alespoň jednou,
- čtyři z polí vnitřního čtverce obsahují součiny čísel ze sousedících polí vnějšího čtverce,
- v kruhu je součet čísel ze sousedících polí vnitřního čtverce.

Zjistěte, které nejmenší a které největší číslo může být napsáno v kruhu.

(*M. Dillingerová*)



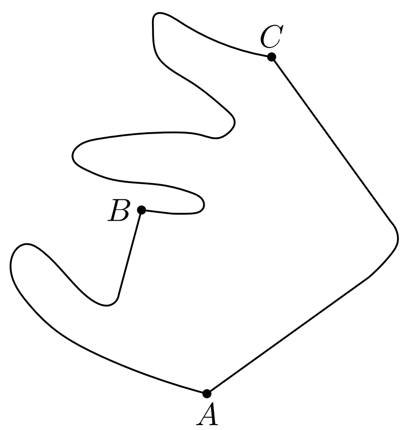
Z9–I–2

Z bodu A do bodu C vede naučná stezka procházející bodem B a jinudy také červená turistická značka, viz obrázek. Kromě toho lze použít také nezakreslenou zkratku dlouhou 1 500 metrů začínající v A a ústící na naučné stezce. Vojtěch zjistil, že

- výlet z A po červené do C a po naučné stezce zpět do A je dlouhý 7 700 metrů,
- výlet z B po naučné stezce do C a pak po červené do A je dlouhý 5 800 metrů,
- s využitím zkratky je cesta z A do B dlouhá 1 700 metrů,
- výlet z A po naučné stezce do C a zpět do A nejprve po naučné stezce a poté po zkratce je dlouhý 8 800 metrů.

Určete délku naučné stezky z A do C. Pokud zadání připouští více odpovědí, uveďte všechny.

(*L. Šimůnek*)



Z9–I–3

Julince se zakutálel míček do bazénu a plaval ve vodě. Jeho nejvyšší bod byl 2 cm nad hladinou. Průměr kružnice, kterou vyznačila hladina vody na povrchu míčku, byl 8 cm.

Určete průměr Julinčina míčku. (*L. Hozová*)

Z9–I–4

Katka si myslela pětimístné přirozené číslo. Do sešitu napsala na první řádek součet myšleného čísla a poloviny myšleného čísla. Na druhý řádek napsala součet myšleného čísla a pětiny myšleného čísla. Na třetí řádek napsala součet myšleného čísla a devítiny myšleného čísla. Nakonec sečetla všechna tři zapsaná čísla a výsledek napsala na čtvrtý řádek. Poté s úžasem zjistila, že na čtvrtém řádku má zapsánu třetí mocninu jistého přirozeného čísla.

Určete nejmenší číslo, které si Katka mohla myslet na začátku. (*L. Růžičková*)

Z9–I–5

Myšky si postavily podzemní domeček sestávající z komůrek a tunýlků:

- každý tunýlek vede z komůrky do komůrky (tzn. žádný není slepý),
- z každé komůrky vedou právě tři tunýlky do tří různých komůrek,
- z každé komůrky se lze tunýlky dostat do kterékoli jiné komůrky,
- v domečku je právě jeden tunýlek takový, že jeho zasypáním se domeček rozdělí na dvě oddělené části.

Kolik nejméně komůrek mohl mít myší domeček? Načrtněte, jak mohly být komůrky pospojovány. (*A. Bohiniková*)

Z9–I–6

Je dána úsečka AB délky 12 cm, na níž je jednou stranou položen čtverec $MRAK$ se stranou délky 2 cm, viz obrázek. $MRAK$ se postupně překlápí po úsečce AB, přičemž bod R zanechává na papíře stopu.

Narýsujte celou stopu bodu R, dokud čtverec neobejde úsečku AB z obou stran a nevrátí se do své původní polohy. (*M. Dillingerová*)