

1. *Virální video získává během každého 24hodinového intervalu stejný počet nových zhlédnutí. Na webu se počet zhlédnutí ukazuje zaokrouhlený dolů na celé miliony. Předevčírem v poledne web ukazoval 1 milion zhlédnutí, včera v poledne 2 miliony, dnes v poledne 4 miliony. Kolik milionů to bude zítra v poledne? Najděte všechny možnosti.* (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Skutečný počet zhlédnutí dnes v poledne označme a (vyjádřeno v milionech). Víme, že $4 \leq a \leq 4,999999$. Přírůstek počtu zhlédnutí od jednoho poledne k následujícímu poledni je pokaždé stejný, označme jej b .

Například pro $a = 4,25$ a $b = 1,6$ je situace následující:

kdy	počet zhlédnutí	ukazatel na webu
předevčírem v poledne	1,05	1
včera v poledne	2,65	2
dnes v poledne	4,25	4
zítra v poledne	5,85	5

Zdůvodníme, proč $b > 1$. Změna počítadla z 2 milionů na 4 miliony znamená, že dnes má video aspoň 4 miliony shlédnutí a včera jich mělo nejvýše 2,999999 milionu, tedy jich přibýlo aspoň $b \geq 4 - 2,999999 > 1$. Zítra v poledne tak bude web ukazovat aspoň 5 milionů, protože $a + b > 4 + 1 = 5$.

Podobně ukážeme, že $b < 2$. Změna z 1 milionu na 2 miliony znamená, že včera mělo video nejvýše 2,999999 milionu shlédnutí a předevčírem jich mělo aspoň 1 milion, tedy jich přibýlo nejvýše $b \leq 2,999999 - 1 < 2$. Zítra v poledne tak bude web ukazovat nejvýše 6 milionů, protože $a + b < 4,999999 + 2 = 6,999999$.

Už jsme ukázali, že hodnota 5 se na webu skutečně může objevit. Hodnota 6 se ukáže pokud např. $a = 4,85$ a $b = 1,9$, viz tabulku:

kdy	počet zhlédnutí	ukazatel na webu
předevčírem v poledne	1,05	1
včera v poledne	2,95	2
dnes v poledne	4,85	4
zítra v poledne	6,75	6

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

- A1. [1 bod] Správná odpověď (i bez zdůvodnění), že řešením budou obě čísla 5 i 6.
- A2. [1 bod] Posloupnost 4 čísel nezaokrouhlených počtů zhlédnutí (např. 1,05; 2,65; 4,25; 5,85) dokládající, že na webu může být číslo 5. Posloupnost lze v principu nahradit například dvojicí $a = 4,25$ a $b = 1,6$ s komentářem, že pak se každé z čísel zaokrouhlí „správně“.
- A3. [1 bod] Posloupnost 4 čísel nezaokrouhlených počtů zhlédnutí (např. 1,05; 2,95; 4,85; 6,75) dokládající, že na webu může být číslo 6. Posloupnost lze v principu nahradit dvojicí $a = 4,85$ a $b = 1,9$ s komentářem, že pak se každé z čísel zaokrouhlí „správně“.
- B1. [1 bod] Úlohu se podaří alespoň částečně převést do matematického jazyka a kdekoli se objeví oboustranný odhad.
 Například se zavedou proměnné a , b jako ve vzorovém řešení (nebo alespoň jedna z nich) a objeví se oboustranný odhad typu $4 < a < 5$ (tento by správně měl být $4 \leq a < 5$, ale drobné nepřesnosti tolerujte).

B2. [1 bod] Zdůvodnění, že $a + b \geq 5$ (stačí úvaha bez použití proměnných).

B3. [1 bod] Zdůvodnění, že $a + b < 7$ (stačí úvaha bez použití proměnných).

Celkem pak za neúplná řešení udělte $A1 + A2 + A3 + B1 + B2 + B3$ bodů. Přitom objeví-li se v řešení oba kroky A2, A3, automaticky udělte i bod za A1. Podobně objeví-li se v řešení oba kroky B2, B3, automaticky udělte i bod za B1.

V krocích B1, B2, B3 tolerujte, jestliže řešení pracuje s nerovnostmi $b \geq 1$, $b > 1$ či $b \geq 1,000001$ (poslední vyplývá z faktu, že počet zhlédnutí je celé číslo a řešení mohou tento fakt používat i bez komentáře). Podobně přistupujte k nerovnostem $b \leq 2$, $b < 2$, $b \leq 1,999999$.

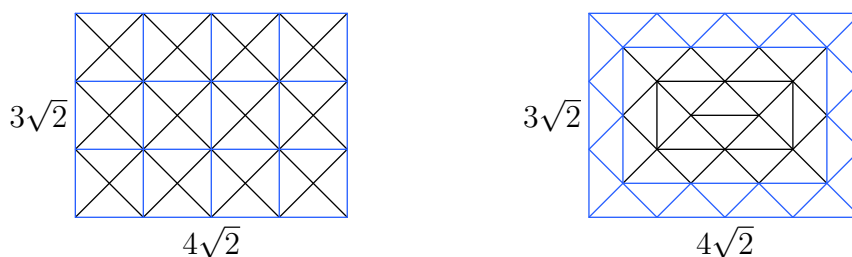
Součástí úplného řešení je nejen ukázat, že jiné hodnoty než 5 či 6 se na webu objevit nemohou, ale také zdůvodnit, že obě tyto hodnoty se objevit mohou (typicky konstrukcí posloupností, jak je uvedeno v krocích A2, A3). Pokud v jinak úplném řešení chybí přesně kroky A2, A3, udělte 5 bodů.

2. Rozhodněte, zda lze beze zbytku rozřezat obdélník a) $3\sqrt{2} \times 4$, b) $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ na pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami délek 1.

(Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

ŘEŠENÍ. a) Obsah obdélníku $3\sqrt{2} \times 4$ je $12\sqrt{2}$, zatímco obsah jednoho trojúhelníku je $\frac{1}{2}$. Museli bychom obdélník rozřezat na $12\sqrt{2} : \frac{1}{2} = 24\sqrt{2}$ shodných trojúhelníků, což ovšem není celé číslo, takže řezání beze zbytku nelze provést.

b) Obdélník lze rozřezat například tak, jak je nakresleno na obrázcích. Klíčové je zde pozorování, že pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnami délek 1 má přeponu délky $\sqrt{2}$.



KOMENTÁŘ. Vlevo je obdélník rozřezán na 3×4 čtverců o straně $\sqrt{2}$ a každý z nich je úhlopříčkami rozdělen na požadované trojúhelníky. Vpravo jsme „po obvodu“ obdélníku přikládali přepony pravoúhlých trojúhelníků a následně odřezali „obvodovou vrstvu“ tvořenou pravoúhlými trojúhelníky. Tím vznikl menší obdélník $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$, s nímž naložíme podobně, atd.

Na oba obrázky lze nahlížet tak, že mřížku tvořenou čtverci 1×1 otočíme o 45° , vhodně položíme na obdélník a následně každý čtverec 1×1 rozdělíme libovolnou úhlopříčkou.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

- C1. [1 bod] Správná odpověď (i bez zdůvodnění nebo se zcela špatným zdůvodněním), že případ a) nepůjde, zatímco případ b) půjde.
- B1. [3 body] Obrázek, který dokládá, že obdélník $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ lze rozřezat. Uznávejte i slovní popis, podle kterého lze obrázek jednoznačně nakreslit. Pokud popis není jednoznačný, ale lze odhadnout, jak byl patrně myšlen, udělte část bodů.
- A1. [3 body] Kompletní zdůvodnění, že obdélník $3\sqrt{2} \times 4$ rozřezat nelze (typicky pomocí argumentu s obsahem).
- A2. [2 body] Zdůvodnění, že obdélník $3\sqrt{2} \times 4$ rozřezat nelze, ve kterém se rozebírají případy, jak který trojúhelník umístit, přičemž je opomenut pouze jeden případ, který je velmi snadné dokončit a tento opomenutý případ je podobný již rozebranému případu.
- A3. [1 bod] Snaha zdůvodnit, že obdélník $3\sqrt{2} \times 4$ rozřezat nelze, přičemž se rozebírají případy, jak který trojúhelník umístit, je opomenut více než jeden případ, ale žádný z opomenutých případů se dále nevětví na podpřípady a každý opomenutý případ lze vyloučit myšlenkou, která se už objevila v rozebraných případech.
- A4. [0 bodů] Snaha zdůvodnit, že obdélník $3\sqrt{2} \times 4$ rozřezat nelze, přičemž se rozebírají případy, jak který trojúhelník umístit, a některé případy jsou opomenuty. Jakmile se některý z opomenutých případů dále větví na podpřípady nebo není jasné, že jej lze vyloučit použitím myšlenky, která se již objevila, neudělujeme za tuto snahu žádné body.

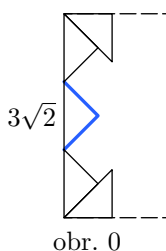
Nejdříve spočítejte $A = \max(A1, A2, A3)$ a celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(C1, B1 + A)$ bodů.

Argument s obsahem použitý v části a) považujeme za přístupný pro každého. Přesto se nejspíš objeví pokusy zdůvodnit část a) jiným způsobem a bude dosti náročné tyto pokusy ohodnotit. Domníváme se, že velká většina z nich skončí v kategorii A4, protože rozборы tohoto typu mají tendenci se větřit tak rychle, že bývá velmi obtížné na žádný případ nezapomenout.

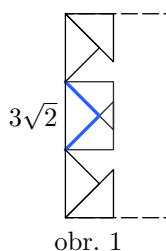
Pro lepší představu, jak mohou vypadat snahy vyřešit část a) rozbořem, uvedeme jedno takové řešení, záměrně sepsané „jazykem studentů“ a na některých místech jej doplníme našimi poznámkami psanými šedou barvou [takto], které snad pomohou porozumět, jak to asi bylo myšleno.

Řešení části a). Pravoúhlý trojúhelník má strany 1, 1, $\sqrt{2}$ [Pythagorova věta].

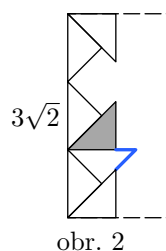
Je jasné, že u strany délky $3\sqrt{2}$ musí být 3 přepony [argument by mohl být přesnější, ale skutečně je dostatečně zřejmé, že rovnost $m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ pro $m, n \in \mathbb{N}_0$ nastane pouze v případě $m = 0$, $n = 3$, přestože formálně bychom měli říct, že pro $n \neq 3$ můžeme napsat $\sqrt{2} = \frac{m}{3-n}$ a tím dostat spor s iracionalitou $\sqrt{2}$] a u stran délky 4 musí být 4 odvěsny. Na obrázku 0 je strana $3\sqrt{2}$ pokryta přeponami a na stranách délky 4 je nakreslen pokaždé jen jeden trojúhelník (jehož umístění je jednoznačně určeno), protože ostatní trojúhelníky lze umístit více způsoby. Rozebereme možnosti, jak pokrýt tučné úsečky délky 1.



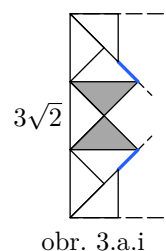
obr. 0



obr. 1

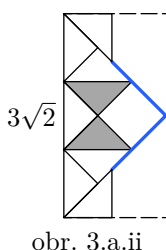


obr. 2

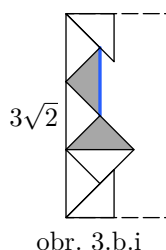


obr. 3.a.i

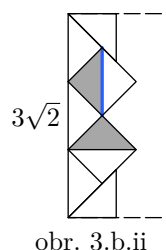
- Obě jsou pokryty přeponami. Pak obě přepony budou přecházet a jejich trojúhelníky se překrývají, viz obrázek 1. [„Přecházet“ není matematický pojem, ale myšlenka je popsána srozumitelně.]
- Jedna je pokryta odvěsnou, jedna přeponou. Búno [bez újmy na obecnosti – to si skutečně můžeme dovolit díky symetrii obdélníku podle vodorovné osy] je přeponou pokryta spodní [nepřesný termín, ale z obrázku je zřejmé, která úsečka se myslí]. Nový trojúhelník (zvýrazněný na obrázku 2) určuje umístění trojúhelníku pod ním a jeho tučný roh nelze pokrýt bez přecházet. [Obě tučné úsečky jsou kratší než 1 a každá z nich musí být pokryta stranou délky aspoň 1. Napravo od tučného rohu tedy dojde k překrytí trojúhelníků, což znamená, že tudy cesta nevede.]
- Obě jsou pokryty odvěsnami. Uvažujme dále tyto dva trojúhelníky (na obrázcích zvýrazněné), jejichž odvěsny pokrývají tučné úsečky z obrázku 1. Znovu rozlišíme různé případy.
 - Oba trojúhelníky mají vodorovné přepony. Pak je určeno umístění trojúhelníků nad nimi a pod nimi jako na obrázku 3.a.i. Dvě tučné úsečky je potřeba protáhnout [jejich délky jsou menší než 1, takže ať už je pokryjeme přeponou délky $\sqrt{2}$ nebo odvěsnou délky 1, budou „protáhnuty“] a následně vyplnit čtverec – jeho pravý roh bude mít problém. Tučné úsečky na obrázku 3.a.ii mají délku $3 - \sqrt{2}$, což nejde pokrýt přesně, takže obě budou přecházet a dojde k překrytí trojúhelníků. [Takže tudy cesta nevede.]
 - Jeden trojúhelník (búno spodní) má vodorovnou přeponu, jeden svislou. Pak je určeno umístění trojúhelníku pod tím, který má vodorovnou přeponu, viz obrázek 3.b.i. Tučnou úsečku délky $\sqrt{2}$ lze pokrýt jedině přeponou [kdybychom ji „pokryli“ odvěsnou délky 1, zbyde nám úsečka délky $\sqrt{2} - 1$, kterou bez překrývání nepokryjeme], takže nám vznikne obrázek 3.b.ii a dostali jsme se do situace 3.a.i [o které už víme, že vede ke sporu].



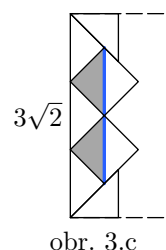
obr. 3.a.ii



obr. 3.b.i



obr. 3.b.ii



obr. 3.c

- c) Oba trojúhelníky mají svislou přeponu, viz obrázek 3.c. Tučnou úsečku délky $2\sqrt{2}$ lze pokrýt jedině dvěma přeponami, takže musíme dvěma trojúhelníky dokončit čtverce, jak už to je na obrázku 3.c nakresleno, a jsme znovu v situaci 3.a.i [o které už víme, že vede ke sporu].

Formulace v tomto řešení nejsou příliš exaktní (což by bylo velmi náročné), ale jsou v principu správné, myšlenky je možné sledovat a mohli bychom tak udělit 3 body za krok A1. Kdyby řešení opomnělo například případ 3.b, mohli bychom udělit 2 body za krok A2. Kdyby řešení opomnělo celý případ 3, udělili bychom už 0 bodů (A4), protože přechod od obrázku 3.a.i k obrázku 3.a.ii vyžaduje myšlenku „protažení“ tučných úseček a „vyskládání“ ještě jednoho čtverce, což v předchozích případech 1 ani 2 nebylo potřeba.

3. Předpokládejme, že šest celých čísel $a, b, c, a + b, b + c, c + a$ je navzájem různých, aspoň jedno je liché, aspoň jedno sudé a navíc součet všech lichých čísel je roven součtu všech sudých čísel. Najděte všechny možné hodnoty součtu $a + b + c$.

Poznámka: Nekladná celá čísla rovněž rozdělujeme na sudá a lichá, např. -5 je liché číslo, 0 je sudé číslo. (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Rozlišíme případy podle počtu sudých čísel mezi čísly a, b, c .

- Všechna jsou sudá. Pak jsou sudá i čísla $a + b, b + c, c + a$, což zadání vylučuje.
- Právě dvě jsou sudá. Pak z čísel $a + b, b + c, c + a$ je pouze jedno sudé, takže celkem máme 3 sudá čísla a 3 lichá čísla. Součet (tří) sudých čísel je číslo sudé, zatímco součet tří lichých čísel je číslo liché, takže tento případ nastat nemůže.
- Právě jedno je sudé. Bez újmy na obecnosti je a sudé. Pak z čísel $a + b, b + c, c + a$ je sudé pouze $b + c$. Protože součet sudých čísel je roven součtu lichých, platí $a + (b + c) = b + c + (a + b) + (c + a)$ a po úpravě $a + b + c = 0$. Tento případ může skutečně nastat, zvolíme-li například $a = 1, b = 2, c = -3$, pak je $a + b = 3, b + c = -1, c + a = -2$ a součet sudých čísel je 0 stejně jako součet lichých čísel.
- Žádné není sudé. Máme tak 3 lichá čísla a, b, c a 3 sudá čísla $a + b, b + c, c + a$. Stejně jako výše součet (tří) sudých čísel je sudý, zatímco součet tří lichých čísel je lichý, takže tento případ nastat nemůže.

Závěr. Součet $a + b + c$ nabývá jediné hodnoty 0 a pro tuto hodnotu skutečně existují vhodná čísla a, b, c splňující zadání úlohy.

KOMENTÁŘ. Ukázali jsme, že případ d) nastat nemůže. Namísto toho bychom mohli v případě d) napsat rovnost $a + b + c = (a + b) + (b + c) + (c + a)$, což dá znovu $a + b + c = 0$, a nezabývat se tím, zda tento případ může či nemůže nastat.

JINÉ ŘEŠENÍ. Součet všech čísel je $3(a + b + c)$. Označíme-li S součet všech sudých čísel a L součet všech lichých čísel, pak je zřejmě $S + L = 3(a + b + c)$. Podle zadání je navíc $S = L$, takže $2S = 2L = 3(a + b + c)$, což znamená, že $a + b + c$ je sudé. Mezi čísly a, b, c je tak buď právě jedno sudé číslo, nebo jsou všechna sudá.

- Jsou-li všechna sudá, jedná se o případ a) z prvního řešení.
- Je-li právě jedno číslo sudé, jedná se o případ c) z prvního řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

- [1 bod] Správná odpověď (i bez zdůvodnění), že hodnota součtu $a + b + c$ je jediné 0.
- [1 bod] Rozlišení případů podle počtu sudých čísel (či počtu lichých čísel). Často asi půjde o jejich počet mezi čísly a, b, c , ale může to být i mezi čísly $a + b, b + c, c + a$ či mezi všemi 6 čísly, možná velmi výjimečně půjde i o jinou množinu čísel.
- [1 bod] Zjištění, že za nějakých okolností musí být součet $a + b + c = 0$.
Například v prvním řešení byl součet $a + b + c = 0$ v případě, že jedno z čísel a, b, c bylo sudé.
- [1 bod] Příklad trojice čísel a, b, c , která splní všechny podmínky zadání. Podmínky není nutné ověřovat explicitně, řešitelům mohou připadat zřejmé.
- [1 bod] Vyloučení nějakého případu použitím podmínky ze zadání, že mezi 6 čísly je aspoň jedno liché.
V prvním řešení to bylo vyloučení případu a).
- [2 body] Vyloučení nějakého případu (nebo více případů) použitím podmínky ze zadání, že součet všech lichých čísel je roven součtu všech sudých čísel.
V prvním řešení to bylo vyloučení případů b) a d), protože součet (tří) sudých čísel je sudý, zatímco součet tří lichých čísel je lichý. Ve druhém řešení jsme podmínku ze zadání napsali jako $S = L$

a získali z ní, že $a + b + c$ je sudé, čímž jsme vyloučili případ, že $a + b + c$ je liché. Je to stejné jako vyloučit případ, ve kterém žádné z čísel a , b , c není sudé a případ, ve kterém dvě z čísel a , b , c jsou sudé (to znovu odpovídá případům b) a d) z prvního řešení).

Celkem pak za neúplná řešení udělte $\max(A1, A2 + A3) + B1 + C1 + C2$ bodů. Pokud chybí rozbor některého případu, udělte nejvýše 5 bodů.