Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		*6*
12		*15*

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. *(J. Zhouf)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V následující tabulce jsou a, b, c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$5a$	$7b$	$8c$

[Čísla ve všech políčkách se rovnají. Protože čísla 5, 7 a 8 jsou nesoudělná, je obecné řešení tvaru $a = 7 \cdot 8 \cdot k$, $b = 5 \cdot 8 \cdot k$, $c = 5 \cdot 7 \cdot k$, kde k je kladné celé číslo. Tři nejmenší řešení (a, b, c) jsou $(56, 40, 35)$, $(112, 80, 70)$, $(168, 120, 105)$.]

N2. V následující tabulce jsou a, b, c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$20a$	$21b$	$12c$

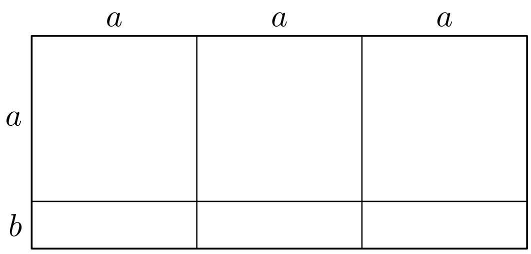
[Čísla ve všech políčkách se rovnají. Čísla 20, 21 a 12 jsou soudělná, jejich rozklady na součiny nesoudělných dělitelů jsou $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$ a $12 = 4 \cdot 3$. Obecné řešení je tvaru $a = 3 \cdot 7 \cdot k$, $b = 4 \cdot 5 \cdot k$, $c = 5 \cdot 7 \cdot k$, kde k je kladné celé číslo. Tři nejmenší řešení (a, b, c) jsou $(21, 20, 35)$, $(42, 40, 70)$ a $(63, 60, 105)$.]

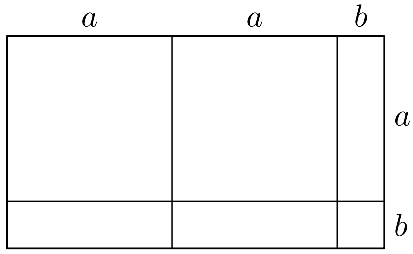
N3. Pro kladná sudá čísla a, b, c platí, že součiny $a \cdot b$ a $b \cdot c$ se rovnají a součin $a \cdot b \cdot c$ je dvojmístný a větší než 75. Jaký může být součet těchto tří čísel? Najděte všechny možnosti.

[Čísla a, b, c jsou sudá, tedy součin $a \cdot b \cdot c$ je násobkem osmi a jeho možné hodnoty jsou 80, 88 nebo 96. Protože $a \cdot b = b \cdot c$, je $a = c$. Hledané trojice (a, b, c) jsou $(2, 20, 2)$, $(2, 22, 2)$, $(2, 24, 2)$ a $(4, 6, 4)$, jejich součty jsou 24, 26, 28 a 14.]

D1. Obdélník je třemi úsečkami rozdělen na tři čtverce a tři menší obdélníky. Všechny dílčí pravoúhelníky mají délky všech stran v cm vyjádřeny celými čísly. Obsah jednoho z malých obdélníků je $14\,\mathrm{cm}^2$. Jaký může být obsah daného obdélníku? Najděte všechny možnosti.

[Typově různá dělení jsou naznačena na obrázcích níže. V obou případech jsou malé obdélníky navzájem shodné. Obsah těchto obdélníků v cm^2 je $a \cdot b = 14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$, tedy máme čtyři možné dvojice a a b. Pro první typ dělení je obsah daného obdélníku $3a(a+b)$, což po dosazení dává $45\,\mathrm{cm}^2$, $630\,\mathrm{cm}^2$, $54\,\mathrm{cm}^2$, nebo $189\,\mathrm{cm}^2$ Pro druhý typ dělení je obsah daného obdélníku $(2a+b)(a+b)$, což po dosazení dává $240\,\mathrm{cm}^2$, $435\,\mathrm{cm}^2$, $99\,\mathrm{cm}^2$, nebo $144\,\mathrm{cm}^2$.]

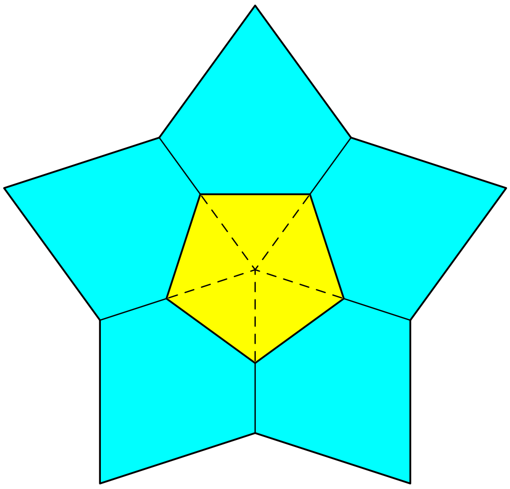




Z9–I–2

Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. *(M. Dományová)*

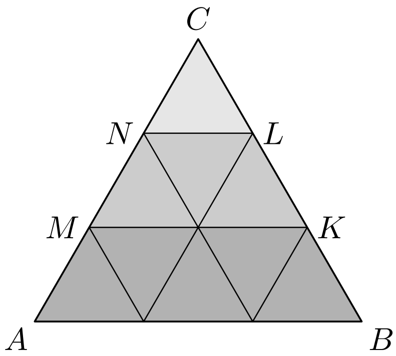


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

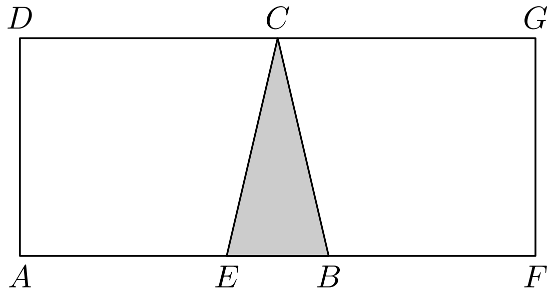
N1. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky $24\,\mathrm{cm}$. Na straně BC jsou body K a L tak, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na straně AC jsou body M a N tak, že $|AM| = |MN| =$

$= |NC|$. Určete postupný poměr obsahů lichoběžníků $ABKM$, $MKLN$ a trojúhelníku NLC. Zkuste úlohu řešit i bez znalosti délky strany trojúhelníku ABC.

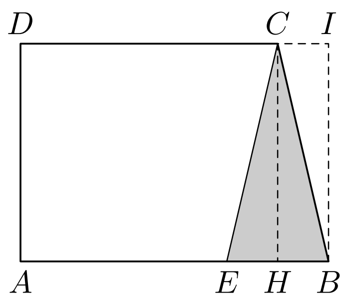
[Trojúhelník ABC lze příčkami rovnoběžnými se stranami rozdělit na devět trojúhelníků shodných s NLC (se stranami délky 8 cm). Lichoběžník $ABKM$ je tvořen pěti takovými trojúhelníky, lichoběžník $MKLN$ třemi. Poměry obsahů jsou $S_{ABKM} : S_{MKLN} : S_{NLC} = 5 : 3 : 1$. (Velikost, ani rovnostrannost trojúhelníku ABC není podstatná.)]



N2. Dva shodné pravoúhlé lichoběžníky $ABCD$ a $FECG$ se překrývají v trojúhelníku EBC. Obsah trojúhelníku EBC tvoří 18 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete poměr délek úseček AB a CD.



[Doplňme body H a I tak, aby $AHCD$ a $ABID$ byly obdélníky. Trojúhelníky EHC, BHC a CIB jsou navzájem shodné, obsah každého z nich odpovídá 9 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Obsah obdélníku $AHCD$, resp. $ABID$ odpovídá 91 %, resp. 109 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Poměr délek úseček AB a CD je stejný jako poměr obsahů obdélníků $ABID$ a $AHCD$, tj. 109 : 91.]

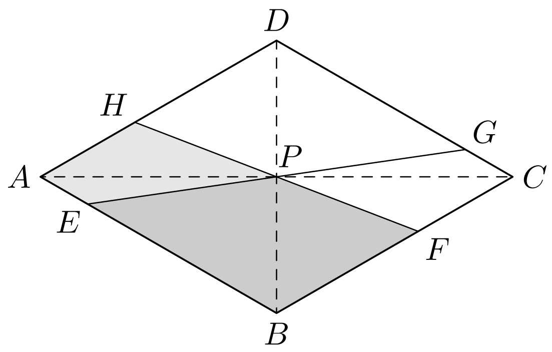


N3. Na stranách AB, BC, CD a DA kosočtverce $ABCD$ jsou postupně dány body E, F, G a H tak, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je průsečíkem přímek EG a HF. Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$.

[Kosočtverec je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček a stejně jsou souměrné dvojice bodů E a G, resp. F a H. Tedy bod P je průsečíkem úhlopříček kosočtverce. Každý ze čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$ je úhlopříčkami rozdělen na dva trojúhelníky. Všechny čtyři trojúhelníky mají společný vrchol P a stejné velikosti výšek z tohoto vrcholu. Tedy jejich obsahy jsou úměrné stranám protilehlým vrcholu P a platí:

$$\frac{S_{AEPH}}{S_{EBFP}} = \frac{S_{AEP} + S_{AHP}}{S_{BEP} + S_{BFP}} = \frac{|AE| + |AH|}{|BE| + |BF|} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{3}{7}.$$

Poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$ je 3 : 7.]

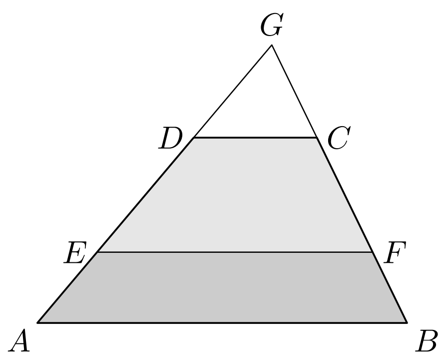


D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = 12\,\text{cm}$, $|CD| = 4\,\text{cm}$ a výškou 6 cm. Na ramenech AD, BC leží body E, F tak, že lichoběžníky $ABFE$ a $EFCD$ mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky EF.

[Prodloužená ramena lichoběžníku se protínají v bodě G. Trojúhelníky DCG, EFG a ABG jsou navzájem podobné. Koeficient podobnosti pro dvojici DCG a ABG je 3, koeficient podobnosti pro dvojici DCG a EFG označíme k. Pro obsahy dílčích lichoběžníků platí

$$S_{ABFE} = (9 - k^2) \cdot S_{DCG}, \quad S_{EFGH} = (k^2 - 1) \cdot S_{DCG}.$$

Z rovnosti obsahů dostáváme $9 - k^2 = k^2 - 1$, odtud $k^2 = 5$, a tedy $k = \sqrt{5}$. Hledaná délka úsečky je $|EF| = k\,|CD| = 4\sqrt{5} \doteq 8{,}9\,(\text{cm})$. (Výška lichoběžníku $ABCD$, ani velikosti základen nejsou podstatné; při řešení byl použit pouze poměr $|AB| : |CD| = 3$.)]



Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvou. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem.

Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? *(P. Bak)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Seznamte se s metodou Eratosthenova síta a najděte pomocí něj všechna prvočísla menší než 100.

[Popis algoritmu najdete v učebnicích o dělitelnosti nebo na internetu.[?] Všechna prvočísla menší než 100 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.]

N2. Obarvěte čísla 1, 2 a 3 podle pravidel ze soutěžní úlohy.

[Čísla 1 a 3 musí mít stejnou barvu, číslo 2 jinou.]

N3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel menších než 6, jejichž součty jsou složená čísla.

[Řešení odpovídají sčítancům v následujících výrazech: $4 = 1 + 3 = 2 + 2$, $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5 = 4 + 4$, $9 = 4 + 5$, $10 = 5 + 5$.]

D1. Leonardo si vypisoval členy Fibonacciho posloupnosti: Začal dvěma jedničkami, k nim připsal jejich součet a v každém dalším kroku doplnil součet předchozích dvou čísel. Několik prvních členů vypadalo takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … Ukažte, že číslo na 9999. místě je složené.

[V posloupnosti se střídají dvě lichá a jedno sudé číslo (součet dvou lichých čísel je sudé číslo, součet sudého a lichého čísla je liché číslo). Každé třetí číslo je sudé a 9999 je násobkem tří, tedy číslo na 9999. místě posloupnosti je sudé. Sudá čísla větší než 2 jsou složená, a to je také naše číslo. Číslo na 9999. místě je složené.]

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá čtverečkové, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. *(M. Dillingerová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte:

a) nejmenší trojmístné čtverečkové číslo;
b) stoprvní trojmístné čtverečkové číslo;
c) stotřicáté trojmístné čtverečkové číslo.

[Všechna čísla od 100 do 199 jsou čtverečková, následující je 201. Tedy a) první je 100; b) stoprvní je 201. Další je třeba pečlivě vypisovat; c) stotřicáté je 248.]

[?] Viz např. Wikipedii.

N2. Kolik trojmístných čtverečkových čísel začíná číslicí 7 a obsahuje číslici 5?

[Čísla 5 a 7 nejsou druhými mocninami. Žádné dvojmístné číslo, které je druhou mocninou, nezačíná 7 a jediné dvojmístné číslo, které je druhou mocninou a obsahuje 5, je 25. Trojmístná čísla, která jsou druhou mocninou a začínají 7, jsou 729 a 784. Tato čísla však neobsahují 5. Vyhovujících čísel je sedm: 725, 751, 715, 754, 745, 759, 795.]

N3. Přirozené číslo nazveme *patrojkové*, jestliže obsahuje číslici 3, ale není dělitelné třemi. Najděte deset nejmenších patrojkových čísel.

[Jsou to čísla 13, 23, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 43, 53.]

D1. Přirozené číslo nazveme *supersloženým*, pokud jeho zápis obsahuje právě dvě číslice, z nichž každá představuje jednomístné složené číslo. (Např. číslo 144 je supersložené, číslo 124 nikoli.) Kolik je trojmístných supersložených čísel?

[Jednomístná složená čísla jsou čtyři: 4, 6, 8 a 9. Na dvou ze tří míst jsou tyto číslice, na zbylém místě je jiná, „nesložená" číslice. Pro „nesloženou" číslici na prvním místě máme $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ možností (nemůže být 0). Pro „nesloženou" číslici na druhém nebo třetím místě, máme vždy $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$ možností. Trojmístných supersložených čísel je $80 + 96 + 96 = 272$.]

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Janečkovi natrhali 30 kg třešní. Z 30 % třešní vyrobili šťávu, polovinu zbylých třešní zpracovali na marmeládu. Nový zbytek rozdělili na tři stejné díly, dva díly usušili a jeden díl snědli. Kolik procent všech třešní Janečkovi usušili?

[Šťávu vyrobili z $\frac{3}{10} \cdot 30 = 9$ kg, zbylo 21 kg. Marmeládu udělali z $\frac{1}{2} \cdot 21 = 10{,}5$ kg, stejné množství zbylo. Na sušení vyčlenili $\frac{2}{3} \cdot 10{,}5 = 7$ kg. Janečkovi usušili $\frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%$ třešní. (Hmotnost natrhaných třešní není k dořešení úlohy nutná.)]

N2. Ve firmě pije 45 % zaměstnanců čaj, ostatní pijí kávu. Kávu sladí o polovinu víc zaměstnanců než je těch, kteří ji nesladí. Kolik procent všech zaměstnanců pije hořkou kávu?

[Kávu pije 55 % zaměstnanců. Poměr těch, co kávu sladí a nesladí, je 3 : 2. Poměr těch, co kávu nesladí, a všech příznivců kávy je 2 : 5. Hořkou kávu pije $\frac{2}{5} \cdot \frac{55}{100} = 22\,\%$ zaměstnanců.]

N3. V učitelském sboru je p vyučujících, z toho $(100 - p)\,\%$ tvoří ženy a mužů je 36. Kolik vyučujících je ve sboru?

[Muži tvoří $p\,\%$ zaměstnanců a je jich 36, tzn. $p \cdot \frac{p}{100} = 36$. Odtud plyne $p^2 = 3600$, tedy $p = 60$. Ve sboru je 60 vyučujících.]

D1. V pytlíku byly rohlíky, z nichž 80 % bylo s kmínem, ostatní s mákem. Po snědení dvou rohlíků s kmínem tvořil tento druh rohlíků 75 % všech. Kolik rohlíků bylo s mákem?

[Původní poměr rohlíků s kmínem a s mákem byl 4 : 1, tedy počet všech rohlíků byl násobkem 5. Postupným zkoušením vyplyne, že všech rohlíků bylo 10, těch s kmínem 8 a těch s mákem 2. (Úlohu lze zapsat pomocí neznámých takto: $\frac{k}{k+m} = \frac{8}{10}$, $\frac{k-2}{k+m-2} = \frac{3}{4}$, kde k a m značí původní počty rohlíků s kmínem a s mákem.)]

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l. Bod S je středem kružnice k, bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS.

Dokažte, že úhel ATM je pravý. *(L. Komín)*

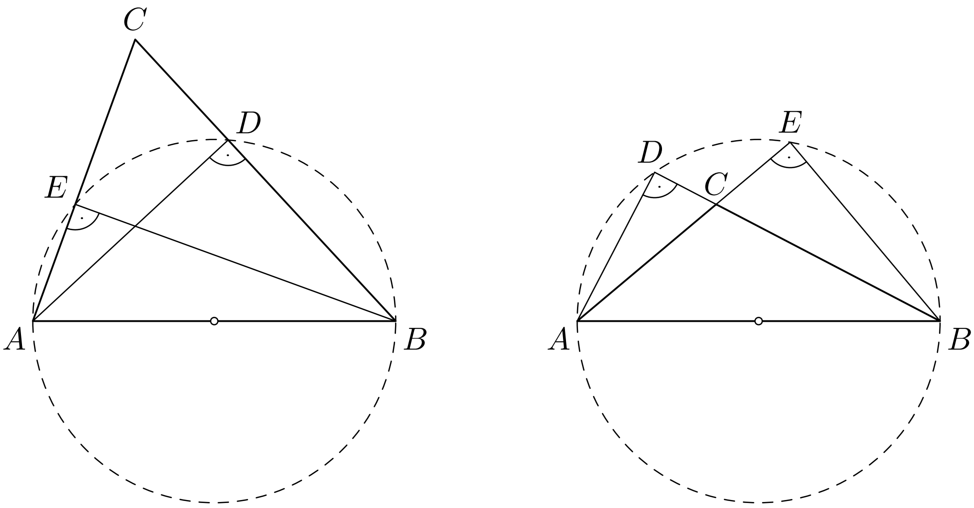
Návodné a doplňující úlohy

N1. Připomeňte si a zformulujte Thaletovu větu.

[Formulaci i se zdůvodněním najdete v učebnicích nebo na internetu:[?] Pokud je AB průměr kružnice a C jakýkoli jiný bod na téže kružnici, potom trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C.]

N2. V obecném trojúhelníku ABC značí D a E paty výšek na strany BC a AC. Dokažte, že body A, B, D a E leží na jedné kružnici.

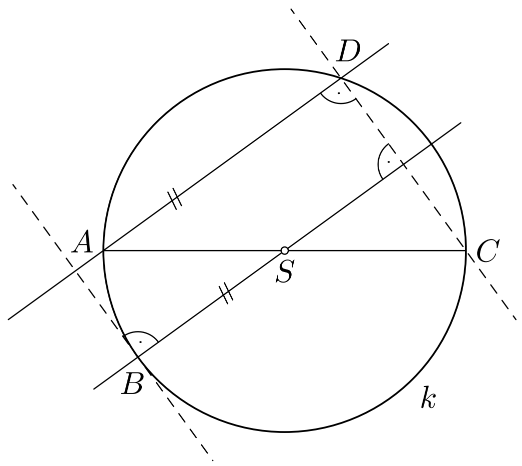
[Trojúhelníky ABD a ABE jsou pravoúhlé s pravými úhly u vrcholů D a E. Vrcholy všech pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB tvoří kružnici, tzv. Thaletovu kružnici nad průměrem AB. (V pravoúhlém trojúhelníku ABC některé body splývají.)]



N3. Na kružnici k se středem S jsou dány navzájem různé body A, B, C, D tak, že platí $S \in AC$ a $BS \| AD$. Dokažte, že tečna ke kružnici k s bodem dotyku B je rovnoběžná s přímkou CD.

[Podle Thaletovy věty je úhel ADC pravý. Přímky BS a AD jsou rovnoběžné, tedy přímky BS a CD jsou kolmé. Tečna s bodem dotyku B je kolmá na BS, tedy je rovnoběžná s CD.]

[?] Viz např. Wikipedii.



D1. Kružnice k a l se protínají v různých bodech A a B. Body C a D jsou krajními body průměrů kružnic k a l procházejících společným bodem A. Dokažte, že body B, C a D leží na jedné přímce.

[Může se stát, že některý s bodů C, D splývá s bodem B. V takovém případě je vlastnost splněna triviálně. Obecně jsou body B, C a D navzájem různé a podle Thaletovy věty jsou úhly ABC a ABD pravé. Tedy body C a D leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B, tzn. body B, C a D leží na jedné přímce.]