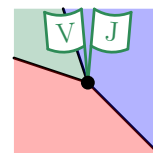


## Zadání úloh domácího kola

## Kategorie A

1. Ostrov je rozdělený na několik království. Území každého království je konvexní mnohoúhelník, který má právě jeden nejsevernější, nejjihnější, nejvýchodnější a nejzápadnější bod. Každý král dostal 4 vlajky s písmeny S, J, V, Z, které umístil do těchto významných bodů svého království. (Například u trojmezí tří států na obrázku jsou takto zapíchnuté 2 vlajky.) Uprostřed ostrova je krtinec, kde se stýká 7 království. Určete všechny možné počty vlajek zapíchnutých do krtince. *(Josef Tkadlec)*



2. Necht  $p, q$  jsou reálná čísla taková, že rovnici

$$|x^2 - 1| = px + q$$

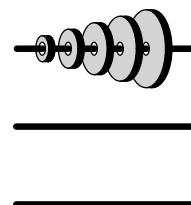
s neznámou  $x$  vyhovují právě 4 navzájem různá reálná čísla.

a) Určete všechny možné hodnoty součtu těchto 4 čísel.

b) Dokažte, že součin těchto 4 čísel leží v intervalu  $(-3, 1)$ .

*(Patrik Bak)*

3. Jozef má hlavolam, který se skládá ze tří vodorovných tyčí a z  $n \geq 2$  různě velkých kotoučů seřazených na první tyči podle velikosti, viz obrázek. V jednom tahu Jozef vysune z libovolné tyče krajní kotouč (zleva nebo zprava) a nasune jej na jinou tyč ze stejné strany. Hlavolam je vyřešený, pokud se všechny kotouče nachází na druhé tyči seřazené stejně jako na začátku. V závislosti na  $n$  určete nejmenší možný počet tahů, který je potřeba na vyřešení hlavolamu.



*(Jozef Rajník)*

4. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla  $a$  a  $b$  taková, že i čísla  $a^3 - 1$  a  $b^3 - 1$  jsou nesoudělná. Dokažte, že čísla  $a^2 - b$  a  $b^2 - a$  jsou rovněž nesoudělná. *(Patrik Bak)*

5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  je dán bod  $R$ . Na stranách  $AB$  a  $BC$  leží po řadě body  $P$  a  $Q$  tak, že obvod trojúhelníku  $PQR$  je nejmenší možný. Podobně na stranách  $BC$  a  $AC$  leží po řadě body  $S$  a  $T$  tak, že obvod trojúhelníku  $RST$  je nejmenší možný. Přímky  $PQ$  a  $ST$  se protínají v bodě  $K$ . Dokažte, že pokud platí  $|\angle BAK| = |\angle CAR|$ , pak trojúhelníky  $PQR$  a  $RST$  mají stejný obvod.

*(Michal Pecho)*

6. Na tabuli jsou napsána 4 přirozená čísla. Žirafa vykonává následující kroky: pokaždé si vybere jedno z čísel na tabuli, smaže ho a místo něj napíše jeho druhou mocninu. Může vždy žirafa po konečně mnoha krocích dosáhnout toho, aby rozdíl některých dvou čísel na tabuli byl násobkem 97? *(Josef Tkadlec)*



Do soutěže se přihlaste na [osmo.matematickaolympiada.cz](https://osmo.matematickaolympiada.cz)

Informace o soutěži včetně návodných úloh najdete na [matematickaolympiada.cz](https://matematickaolympiada.cz)

