

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3 , pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Vyberte všechny trojice jednomístných prvočísel $p_1 < p_2 < p_3$ a určete výsledek součinu

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1).$$

[Jednomístná prvočísla jsou 2, 3, 5, 7. Z nich lze vybrat čtyři vzestupně uspořádané trojice s odpovídajícími výsledky 3, 5, 15 a 8.]

N2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y , pro která platí

$$(x - y) \cdot (x + y) = 105.$$

[Číslo 105 lze rozložit na součin dvou přirozených čísel následujícími způsoby:

$$105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15.$$

Číslo x je větší než y a první součinitel v předchozím rozkladu prozrazuje o kolik. Hledané dvojice x, y jsou 53, 52; 19, 16; 13, 8 a 11, 4.]

N3. Najděte všechny dvojice prvočísel, pro která platí, že součin jejich součtu a jejich rozdílu je roven 117.

[Jako v předchozí úloze se určí rozklady čísla 117 na dva součinitele a odpovídající dvojice čísel 59, 58; 21, 18 a 11, 2. Pouze poslední dvojici tvoří prvočísla. Jediná vyhovující dvojice je 11, 2.]

D1. Najděte všechny dvojice navzájem různých prvočísel p_1 a p_2 , pro která platí

$$p_1 \cdot (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 315.$$

[Číslo p_1 je větší než p_2 a součinitelé jsou uspořádáni takto: $(p_1 - p_2) < p_1 < (p_1 + p_2)$. Možné rozklady čísla 315 s prostředním součinitelem prvočíslem jsou:

$$315 = 1 \cdot 3 \cdot 105 = 1 \cdot 5 \cdot 63 = 3 \cdot 5 \cdot 21 = 1 \cdot 7 \cdot 45 = 3 \cdot 7 \cdot 15 = 5 \cdot 7 \cdot 9.$$

Jedině v posledním případě jsou rozdíly mezi sousedními součiniteli stejné. Jediná vyhovující dvojice je $p_1 = 7$ a $p_2 = 2$.]

Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je středem úsečky CD ,
- bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC ,
- bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD ,
- bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC ,
- úhel BAD má velikost 60° .

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V obdélníku $ABCD$ je bod M středem strany AB . Určete poměr obsahů trojúhelníku AMD a čtyřúhelníku $MBCD$.

[Střed strany CD označíme N . Úsečka MN dělí obdélník na dva shodné obdélníky. Úhlopříčka MD dělí obdélník $AMND$ na dva shodné trojúhelníky, z nichž jeden je AMD . Hledaný poměr obsahů je $1 : 3$.]

- N2. V trojúhelníku ABC platí, že bod M je středem strany AC a úsečky MA , MB a AB jsou shodné. Určete poměr obsahů trojúhelníků ABM a MBC .

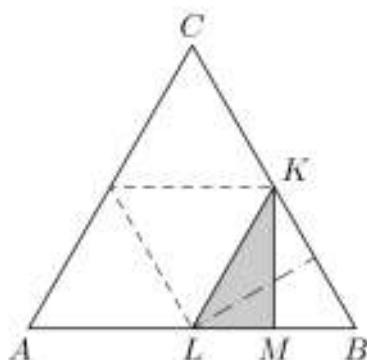
[Trojúhelníky ABM a MBC mají společnou výšku z vrcholu B . Tedy poměr jejich obsahů je stejný jako poměr délek stran AM a MC , a ten je $1 : 1$. (Upřesnění o úsečkách MA , MB a AB není podstatné.)]

- N3. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC jsou body K , L a M tak, že platí:

- bod K je středem strany BC ,
- bod L je průsečíkem strany AB s osou úsečky KB ,
- bod M je středem úsečky BL .

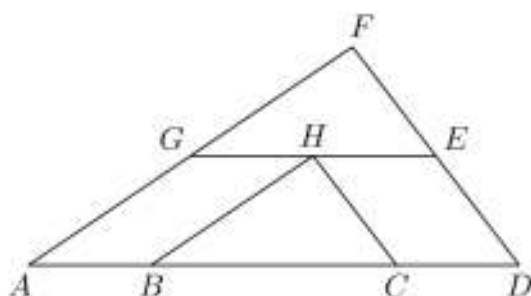
Určete poměr obsahů trojúhelníků KLM a ABC .

[Ze zadání plyne, že trojúhelník KLB je rovnostranný. Tedy L je středem strany AB a celý trojúhelník ABC lze rozdělit na čtyři trojúhelníky shodné s KLB . Úsečka KM dělí trojúhelník KLB na dvě shodné části. Hledaný poměr obsahů je $1 : 8$.]

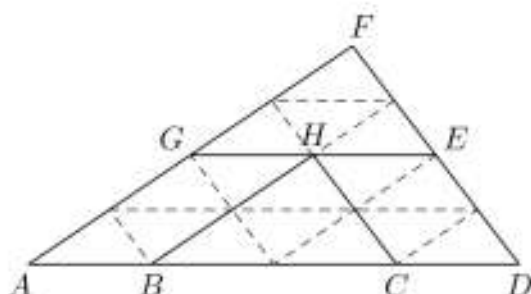


- D1. Obecný trojúhelník ADF je rozdělen na dva trojúhelníky GEF a BCH a dva rovnoběžníky $ABHG$ a $CDEH$. Trojúhelníky GEF a BCH jsou shodné a bod H leží na

těžnici trojúhelníku ADF procházející vrcholem F . Určete poměr obsahů trojúhelníku GEF a rovnoběžníku $CDEH$.



[Ze zadaných vztahů plyne, že úsečka GE je střední příčkou trojúhelníku ADF , bod H je jejím středem a všechny čtyři dílčí útvary mají stejné výšky na strany rovnoběžné s AD . Tedy všechny čtyři dílčí útvary mají stejné obsahy. Hledaný poměr je $1 : 1$. (Stejný závěr lze odvodit z pomocného dělení na menší shodné trojúhelníky, viz obrázek níže.)]



Z8-I-3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně?
(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Laura, Aleš a Ivan sbírali na táboře kešky. Každý našel alespoň jednu, dohromady jich nasbírali 23 a Laura jich nasbírala pětkrát tolik co Ivan. Kolik kešek mohl nasbírat Aleš? Určete všechny možnosti.

[Ivan měl nejméně 1 a nejvíce 3 kešky (pro 4 a více by Laura měla 20 a více, tedy dohromady více než 23). Pokud měl Ivan 1, 2, resp. 3 kešky, pak Laura měla 5, 10, resp. 15 a Aleš jich měl 17, 11, resp. 5.]

N2. Jakub dal kamarádům za úkol uhodnout číslo, které si myslí. Prozradil, že se jedná o dvojmístné číslo menší než sedminásobek největšího jednomístného čísla a větší než druhá mocnina počtu dnů v týdnu. Kdyby navíc svoje číslo vydělil osmi, dostal by

počet svých kšiltovek. Mohou kamarádi určit Jakubovo myšlené číslo, i když neznají počet jeho kšiltovek?

[Číslo je v rozmezí od 49 do 63 a je dělitelné osmi, tedy to může být jediné číslo 56. Jakubovo číslo určit lze, i když počet kšiltovek není předem znám (z výsledku plyne, že jich bylo 7).]

N3. Andrea sbírá pohlednice z Arménie, Belgie a Číny. Z každé země má alespoň jednu pohlednici. Pohlednic z Arménie má méně než pohlednic z Belgie. Pohlednic z Číny má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Belgie. Zdeněk se z těchto informací snažil zjistit, kolik vlastně má Andrea pohlednic, a nevěděl si rady. Andrea mu pomohla sdělením, že v jejím případě jsou těmito omezeními počty pohlednic z jednotlivých zemí popsány jednoznačně. Kolik má Andrea pohlednic?

[Počet pohlednic z Číny je danými omezeními popsán jednoznačně, pouze když pohlednice z Belgie jsou 2. Pohlednic z Číny je 11 a pohlednice z Arménie je 1. Andrea má 14 pohlednic.]

D1. Libor sbírá pohlednice z Andorry, Brazílie, Černé Hory a Dánska, celkem jich má méně než 40. Pohlednic z Brazílie má více než dvojnásobek a méně než trojnásobek počtu pohlednic z Andorry. Pohlednic z Černé Hory má více než pohlednic z Andorry a méně než pohlednic z Brazílie. Pohlednic z Dánska má dvakrát tolik co pohlednic z Brazílie. Kolik nejméně a kolik nejvíce pohlednic může mít Libor?

[Pohlednice z Andorry byly nejméně 2 a nejvíce 4 (kdyby byla žádná nebo 1, nevyhovovala by podmínka na počet pohlednic z Brazílie; kdyby jich bylo více než 4, nevyhovovala by podmínka na celkový počet pohlednic). Libor mohl mít nejméně 20 pohlednic (2 z Andorry, 3 z Černé Hory, 5 z Brazílie, 10 z Dánska) a nejvíce 39 pohlednic (4 z Andorry, 8 z Černé Hory, 9 z Brazílie, 18 z Dánska, nebo 4 z Andorry, 5 z Černé Hory, 10 z Brazílie, 20 z Dánska).]

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Adam, Bořek, Cyril, Dan a Emil porovnávali svoje časy v běhu na 60 metrů. Bořek doběhl stejně jako Cyril za 11,2 vteřin, Emil doběhl za 9,3 vteřin a Dan za 10,8 vteřin. Adam svůj čas nechtěl prozradit, ale všichni věděli, že jejich průměrný čas byl 10,6 vteřin. Jaký byl Adamův čas?

[Součet časů všech pěti chlapců byl stejný jako pětinásobek průměrného času. Adamův čas byl 10,5 vteřin ($5 \cdot 10,6 = 53 = 10,5 + 2 \cdot 11,2 + 9,3 + 10,8$).]

N2. Během jednoho roku zachránil šestičlenný tým superhrdinů řadu měst, průměrně každý 11. Thor, Hulk a Iron Man zachránili každý stejné množství měst, Kapitán Amerika jich zachránil 5, Ant-Man 7 a Hawkeye 6. Kolik měst zachránil Hulk?

[Součet měst, které zachránili jednotliví superhrdinové, je stejný jako šestinásobek průměrného počtu. Hulk (stejně jako Thor a Iron Man) zachránil 16 měst ($6 \cdot 11 = 66 = 3 \cdot 16 + 5 + 7 + 6$).]

N3. Průměrná výška deseti nejvyšších hor světa je 8 378 metrů nad mořem. Jak by se změnila průměrná výška, pokud bychom z tohoto seznamu vynechali Annapurnu (8 091 m), K2 (8 611 m) a Makalu (8 485 m)?

[Součet výšek deseti nejvyšších hor je 83 780 m, součet výšek vynechaných hor je 25 187 m. Průměrná výška zbylých sedmi hor je přibližně 8 370 m ($(83\,780 - 25\,187)/7 \doteq 8\,370$).]

D1. V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6. Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo.

[Pracujeme se zaokrouhlenými čísly, tedy skutečný průměrný bodový zisk mohl být v rozmezí od 10,35 včetně po 10,45 vyjma. Pokud n značí počet účastníků soutěže a c celkový součet bodů získaných všemi soutěžícími, potom spolu s další podmínkou ze zadání dostáváme:

$$10,35 \leq \frac{c}{n} < 10,45, \quad 10,55 \leq \frac{c+4}{n} < 10,65.$$

Odtud po úpravách plyne $40/3 < n < 40$. Soutěže se zúčastnilo nejméně 14 a nejvíce 39 dětí.[?]

Z8–I–5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S . Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B leží na přímce p ,
- kružnice k se dotýká strany CD ,
- kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L ,
- $|AK| = |CL| = 1,5$ cm.

(M. Petrová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Narýsujte čtverec $ABCD$ o straně délky 5 cm. Poté narýsujte kružnici vepsanou a kružnici opsanou čtverci $ABCD$.

[Obě kružnice mají střed ve středu čtverce, tj. v průsečíku úhlopříček AC a BD . Poloměr kružnice vepsané, resp. opsané se shoduje s polovinou strany, resp. úhlopříčky čtverce. Body dotyku vepsané kružnice leží na kolmicích ke stranám čtverce procházejících jeho středem.]

[?] Převzato ze 73. ročníku MO, úloha Z9–I–3.

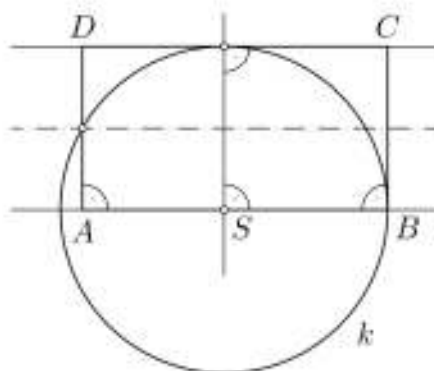
- N2. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 4 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$, jehož strany AB , CD a AD se dotýkají kružnice k a délky stran BC a CD jsou v poměru 2 : 3.

[Průměr kružnice k se shoduje se stranami AD a BC . Tedy $|AD| = |BC| = 8$ cm a následně $|AB| = |CD| = 12$ cm. Konstrukci lze začít s libovolným průměrem kružnice k a využít kolmostí stran obdélníku na odpovídající průměry v bodech dotyku.]

- N3. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- bod S leží na straně AB ,
- bod B leží na kružnici k ,
- kružnice k se dotýká strany CD ,
- kružnice k protíná stranu AD v jejím středu.

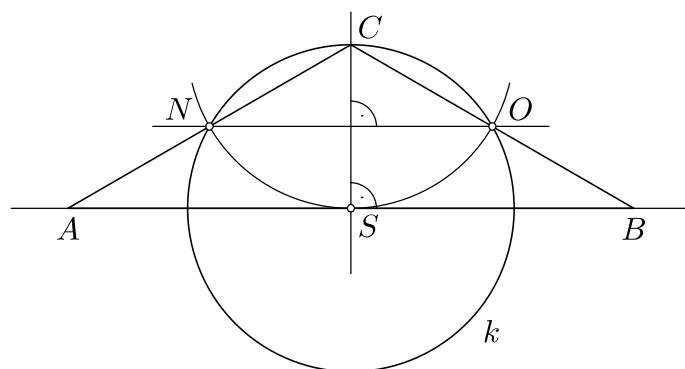
[Poloměr kružnice k se shoduje se stranami AD a BC . Průsečík kružnice k a strany AD leží na ose souměrnosti obdélníku kolmé k těmto stranám, a to je přímka rovnoběžná se stranou AB ve vzdálenosti 3 cm. Konstrukci lze začít s libovolným průměrem kružnice k a využít kolmostí stran obdélníku na odpovídající průměry v bodech dotyku.]



- D1. Je dána kružnice k se středem S . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby platilo:

- bod S leží na straně AB ,
- bod C leží na kružnici k ,
- ramena AC a BC protínají kružnici k v bodech N a O ,
- úsečka NO je střední příčkou trojúhelníku ABC .

[Úsečka SC je výškou a osou souměrnosti trojúhelníku ABC . Body N a O leží na ose úsečky SC , příp. také na kružnici shodné s k se středem v bodě C . Konstrukci lze začít s libovolným bodem C na kružnici k , poté využít kolmostí $NO \perp SC$, $AB \perp SC$ a vlastností střední příčky.]



Z8–I–6

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10, menší než 30 a žádné nebylo dělitelné čtyřmi. Pro každý vrchol však součet čísel na všech stěnách, které ho obsahovaly, byl dělitelný čtyřmi. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu?

(K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Silva zkoumala čtyřstěn, který se objevil na její lavici. Na čtyřech stěnách byla napsána čtyři různá čísla, žádné z nich nebylo dělitelné třemi. Pro každý vrchol však součet čísel na třech stěnách, které ho obsahovaly, dělitelný třemi byl. Která čísla mohla být napsána na stěnách čtyřstěnu? Najděte alespoň dvě možnosti.

[Pro dvě libovolná čísla lze třetí doplnit tak, aby součet všech tří byl dělitelný třemi. Aby součet čísel na každých třech stěnách byl dělitelný třemi, musela všechna čísla po dělení třemi dávat stejný zbytek, tj. každá dvě čísla se lišila o násobek tří. Řešení je nekonečně mnoho, dvě vyhovující čtveřice jsou 1, 4, 7, 10 a 2, 5, 8, 11.]

- N2. Karel popsal stěny krychle tak, že na různých stěnách byla různá přirozená čísla, součet čísel na každých dvou protilehlých stěnách byl dělitelný čtyřmi a největší z použitých čísel bylo co nejmenší. Která čísla Karel použil?

[Pro libovolné číslo na jedné stěně lze číslo na protější stěně doplnit tak, aby jejich součet byl dělitelný čtyřmi. Karel použil čísla 1, 2, 3, 5, 6, 7 (dvojice na protilehlých stěnách mohl tvořit různě, avšak ne libovolně).]

- N3. Jindra popsal stěny krychle tak, že na různých stěnách byla různá přirozená čísla, součet čísel na každých dvou sousedních stěnách byl dělitelný čtyřmi a největší z použitých čísel bylo co nejmenší. Která čísla Jindra použil?

[Pro číslo na jedné stěně nelze čísla na čtyřech sousedních stěnách doplnit vždy tak, aby součty každých dvou sousedních byly dělitelné čtyřmi: Liché číslo dává po dělení čtyřmi buď zbytek 1, nebo 3. Tyto dvě možnosti by se musely střídát na každých dvou sousedních stěnách, a to pro tři stěny se společným vrcholem zajistit nelze. Pro sudá čísla doplnění možné je, nejmenší použitelná čísla jsou 2, 6, 10, 14, 18, 22 (všechna dávají po dělení čtyřmi zbytek 2), a to jsou čísla, která Jindra použil.]

D1. Vrcholům šestibokého jehlanu jsou přiřazena přirozená čísla tak, že různé vrcholy mají různá čísla a pro každou stěnu je součet čísel u všech jejích vrcholů dělitelný čtyřmi. Ukažte, že zbytek, který dává číslo u hlavního vrcholu po dělení čtyřmi, nemůže být jiný než nula.

[Ukážeme, že po dělení čtyřmi dává číslo u hlavního vrcholu stejný zbytek jako součet čísel u vrcholů podstavy. V následující tabulce jsou postupně pro všechny zbytky u hlavního vrcholu rozepsány možné zbytky u ostatních šesti vrcholů (aby platil požadavek pro každou stěnu obsahující hlavní vrchol), na posledním řádku je zbytek odpovídající jejich součtu. Požadavek pro podstavu jehlanu platí pouze v prvním případě.]

hlavní	0	1	2	3
ostatní	0 1 2	0 1	0 1 3	0 2
	0 3 2	3 2	2 1 3	1 3
	0 1 2	0 1	0 1 3	0 2
	0 3 2	3 2	2 1 3	1 3
	0 1 2	0 1	0 1 3	0 2
	0 3 2	3 2	2 1 3	1 3
součet	0	1	2	3