

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		6
12		15

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. (J. Zhouf)

Možné řešení. Součin daných čísel v prvním řádku je 18, ve třetím řádku 180, v prvním sloupci 36 a ve třetím sloupci 90. Čísla 18, 36 a 90 jsou děliteli čísla 180:

$$180 = 18 \cdot 10 = 36 \cdot 5 = 90 \cdot 2.$$

Aby součiny všech čísel v těchto čtyřech řádcích/sloupcích byly stejné, musí být neznámá čísla v prvním řádku, v prvním sloupci a ve třetím sloupci násobky neznámého čísla ve třetím řádku. Toto číslo označíme x , neznámé číslo v prostředním políčku označíme y :

3	$10x$	6
$5x$	y	$2x$
12	x	15

Aby součin všech čísel ve druhém řádku či sloupci byl stejný jako všechny ostatní, musí platit $10x^2y = 180x$, a tedy $xy = 18$. Číslo 18 má šest (kladných) dělitelů:

$$18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6,$$

a to jsou jediné možnosti k doplnění neznámých x a y .

Tabulku lze doplnit šesti způsoby:

3	10	6
5	18	2
12	1	15

3	20	6
10	9	4
12	2	15

3	30	6
15	6	6
12	3	15

3	180	6
90	1	36
12	18	15

3	90	6
45	2	18
12	9	15

3	60	6
30	3	12
12	6	15

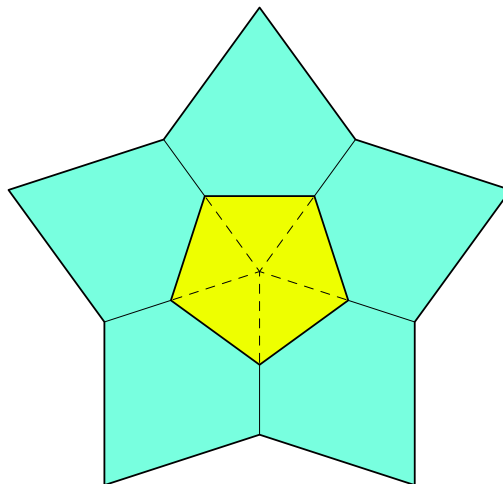
Poznámka. Bez úvodního pozorování je v tabulce pět neznámých, jejichž závislosti lze postupně odvodit porovnáváním součinů. Tytéž závislosti lze odhalit také pomocí prvočíselných rozkladů daných čísel:

3	$2 \cdot 5 \cdot x$	$2 \cdot 3$
$5 \cdot x$	y	$2 \cdot x$
$2 \cdot 2 \cdot 3$	x	$3 \cdot 5$

Z9–I–2

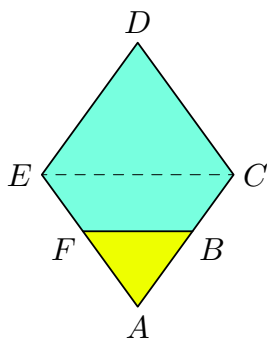
Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. (M. Dományová)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Vybíráme jeden částečně překrytý kosočtverec, příslušné body označíme jako na obrázku:



Úsečky BF a CE jsou rovnoběžné, tedy trojúhelníky ABF a ACE jsou podobné. Úsečka AB představuje poloměr kružnice opsané pětiúhelníku, úsečka AC je stranou kosočtverce. Jejich velikosti jsou v poměru $4 : 7$, a to je také koeficient podobnosti trojúhelníků ABF a ACE . Pro jejich obsahy tedy platí

$$S_{ABF} : S_{ACE} = 16 : 49. \quad (*)$$

Pětiúhelník má obsah $5S_{ABF}$, nepřekrytá část kosočtverce má obsah $2S_{ACE} - S_{ABF}$. Oba obsahy vyjádříme pomocí $(*)$ a porovnááme:

$$5S_{ABF} = 5 \cdot \frac{16}{49} S_{ACE} = \frac{80}{49} S_{ACE},$$

$$2S_{ACE} - S_{ABF} = \left(2 - \frac{16}{49}\right) S_{ACE} = \frac{82}{49} S_{ACE}.$$

Nepřekrytá část kosočtverce má větší obsah než pětiúhelník.

Poznámka. Pro obecný koeficient k podobnosti trojúhelníků ABF a ACE vychází $5S_{ABF} = 2S_{ACE} - S_{ABF}$, právě když $5k^2 = 2 - k^2$ neboli $k^2 = 1/3$. Pro $k = 4/7$ dostáváme $k^2 = 16/49 < 1/3$, a tedy $5S_{ABF} < 2S_{ACE} - S_{ABF}$.

Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvu. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem.

Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? (P. Bak)

Možné řešení. Postupně probereme možnosti podle počtu čísel na tabuli, kde v každém kroku rozšíříme závěry kroku předchozího. V případech s více možnými součty vypisujeme prvočíselné výsledky na prvním řádku, složené výsledky na druhém.

- Příklad s jedním číslem vyhovuje triviálně, neboť není co sčítat.
- Pro dvě čísla je jediný možný součet

$$1 + 2 = 3,$$

a to je prvočíslo. Tento případ je vyhovující, právě když jsou čísla 1 a 2 různobarevná.

- Pro tři čísla jsou tři možné součty; navíc k předchozímu to jsou

$$2 + 3 = 5,$$

$$1 + 3 = 4.$$

Tento případ je vyhovující, právě když čísla 1 a 3 mají jednu barvu a číslo 2 druhou.

- Pro čtyři čísla je šest možných součtů; navíc k předchozím to jsou

$$1 + 4 = 5, \quad 3 + 4 = 7,$$

$$2 + 4 = 6.$$

Tento případ je vyhovující, právě když čísla 1 a 3 mají jednu barvu a čísla 2 a 4 druhou.

- Pro pět čísel je deset možných součtů; navíc k předchozím to jsou

$$2 + 5 = 7,$$

$$1 + 5 = 6, \quad 3 + 5 = 8, \quad 4 + 5 = 9.$$

Tento případ je nevyhovující: nové číslo 5 má mít jinou barvu než 2 ($2 + 5 = 7$) a stejnou barvu jako 4 ($4 + 5 = 9$), přitom čísla 2 a 4 mají barvu stejnou ($2 + 4 = 6$).

Případy s více než pěti čísly zahrnují všechny předchozí součty, tedy jsou všechny nevyhovující (problém s barvou čísla 5).

Na tabuli mohou být napsána nanejvýš čtyři čísla.

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá *čtverečkové*, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel.

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Druhé mocniny jednomístných čísel jsou

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Druhé mocniny dvojmístných čísel jsou alespoň trojmístná čísla a není třeba uvažovat. Tedy dvojmístná čtverečková čísla jsou dvojmístná čísla z předchozího výčtu nebo čísla obsahující číslice 1, 4 či 9 (tyto možnosti se nevyklučují).

Dvojmístných čísel obsahujících danou nenulovou číslici je 18: pro číslici na místě jednotek to je 9 možností ($1*$, \dots , $9*$), pro číslici na místě desítek to je 10 možností ($*0$, \dots , $*9$) a číslo s toutéž číslicí na místě jednotek i desítek je zahrnuto v obou případech.

Abychom nic neopomněli a něco nezahrnuli dvakrát, budeme čtverečková čísla počítat postupně:

- dvojmístných čísel v úvodním výčtu je 6 (jmenovitě 16, 25, 36, 49, 64, 81),

- dalších čísel obsahujících číslici 1 je 16 (čísla 16 a 81 jsou již započtena),
- dalších čísel obsahujících číslici 4 je 14 (čísla 14, 41, 49 a 64 jsou již započtena),
- dalších čísel obsahujících číslici 9 je 14 (čísla 19, 91, 49 a 94 jsou již započtena).

Dvojmístných čtverečkových čísel je $6 + 16 + 14 + 14 = 50$.

Poznámka. Dvojmístná čísla začínající číslicí 1, 4 či 9 (s libovolnou druhou číslicí) jsou čtverečková — takových čísel je $3 \cdot 10 = 30$. Dvojmístná čísla začínající číslicí 2, 3, 5, 6, 7 či 8 jsou čtverečková, pokud druhá číslice je 1, 4 či 9 — takových čísel je $6 \cdot 3 = 18$. Dvojmístná čísla, která jsou druhými mocninami přirozených čísel a která nejsou zahrnuta mezi předchozími případy, jsou dvě — 25 a 36. Dvojmístných čtverečkových čísel je $30 + 18 + 2 = 50$.

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? (I. Jančígová)

Možné řešení. Označme d původní počet děvčat v oddíle. Původní poměr děvčat vůči všem dětem byl 50 %, tedy původní počet všech dětí byl $2d$. Počet všech dětí se snížil o 10 %, tedy nový počet všech dětí byl

$$\frac{9}{10} \cdot 2d = \frac{9}{5} d.$$

Nový poměr děvčat vůči všem dětem byl 55 %, tedy nový počet děvčat byl

$$\frac{55}{100} \cdot \frac{9}{5} d = \frac{99}{100} d.$$

Počet děvčat se snížil o 1 %.

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l . Bod S je středem kružnice k , bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS .

Dokažte, že úhel ATM je pravý. (L. Komín)

Možné řešení. Dotyk kružnic k a l znamená, že spojnice jejich středů prochází bodem dotyku T . Druhý průsečík této spojnice s kružnicí l označíme B .

Kružnice k je dvakrát větší než kružnice l , tedy bod T je středem úsečky SB . Bod M je středem úsečky AS , tedy MT je střední příčkou trojúhelníku SBA . Odtud plyne, že úsečky AB a MT jsou rovnoběžné, a proto jsou (střídavé) úhly ATM a BAT shodné. Podle Thaletovy věty je úhel BAT pravý, tedy také úhel ATM je pravý.

