I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3, pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(*E. Novotná*)

Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je středem úsečky CD,
- bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC,
- bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD,
- bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC,
- úhel BAD má velikost $60°$.

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$. (*M. Macko*)

Z8–I–3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně? (*E. Novotná*)

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. (*I. Jančigová*)

Z8–I–5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B leží na přímce p,
- kružnice k se dotýká strany CD,
- kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L,
- $|AK| = |CL| = 1{,}5$ cm.

(*M. Petrová*)

Z8–I–6

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10 a menší než 30. Součet čísel na všech stěnách obsahujících libovolný vrchol byl násobkem čtyř, přitom žádné číslo násobkem čtyř nebylo. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu? (*K. Pazourek*)