

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2x + \lfloor y \rfloor = 2022,$$

$$3y + \lfloor 2x \rfloor = 2023.$$

(Symbol $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část reálného čísla a , tj. největší celé číslo, které není větší než a . Např. $\lfloor 1,9 \rfloor = 1$ a $\lfloor -1,1 \rfloor = -2$.) (Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\lfloor 3x + 5 \rfloor = 10$.

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $x + \lfloor 2y \rfloor = 8$, $\lfloor 3x \rfloor - y = 3$.

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $3x + \lfloor y \rfloor = 10$, $\lfloor 4x \rfloor + x + y = 17$.

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $\lfloor x + y \rfloor = x - y$, $\lfloor 5y + x \rfloor = 5y - x$.

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Na polopřímkách opačných k CA a BA leží postupně body B' a C' tak, že $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC .

(Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový (tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici), právě když platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$.

N2. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový, právě když součet velikostí úhlů ABC a ADC je 180° .

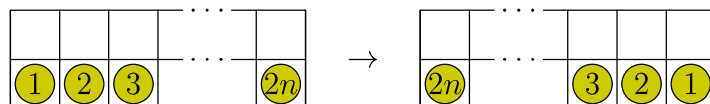
N3. Dokažte tvrzení „o Švrčkově bodu“: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na kterém neleží vrchol A .

D1. Dokažte tvrzení „o třech prstech“: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na kterém neleží vrchol A . Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

D2. Dokažte, že osa vnějšího úhlu při vrcholu A libovolného trojúhelníku ABC prochází středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na kterém leží vrchol A .

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Uvnitř strany AB leží bod D a na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|BD| = |CE|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ADE mají kromě bodu A ještě další společný bod na ose úhlu BAC .

3. Pro dané kladné celé číslo n uvažme obdélníkový hrací plán $2n \times 2$ a na něm $2n$ žetonů očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$ a rozmístěných jako na obrázku vlevo. V jednom tahu je možné posunout jeden žeton z jeho políčka na políčko sousedící stranou, pokud je prázdné.* Kolika nejméně tahy lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo?



(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Uvažujme situaci soutěžní úlohy pro $n = 3$. *Vodorovným* nazveme každý tah, při kterém je žeton posunut v řádku. Udejte příklad posloupnosti tahů, kterou splníme cíl úlohy a která přitom obsahuje nejmenší možný počet vodorovných tahů.
- N2. Rovnost $1 + 2 + 4 + 5 + \dots + (3n - 2) + (3n - 1) = 3n^2$ dokažte pro každé přirozené číslo n .
- N3. Zdůvodněte, že v průběhu tahů vedoucích k cíli soutěžní úlohy se z každých dvou žetonů musí aspoň jeden někdy dostat do horního řádku hracího plánu.
- D1. Uvažujme stejné počáteční rozestavení $2n$ žetonů jako v soutěžní úloze. Kolika nejméně tahy lze získat rozestavení, kdy opět všechny žetony budou v dolním řádku, avšak žeton 1 se ocitne v posledním sloupci?
- D2. V jedné řadě stojí n žetonů postupně s čísly od 1 do n . V každém tahu můžeme navzájem vyměnit dva sousední žetony. Kolika nejméně tahy lze původní pořadí žetonů změnit na opačné, tj. s čísly od n do 1?
- D3. V situaci ze soutěžní úlohy je tentokrát v dolním řádku rozmístěno $2n$ žetonů s čísly $1, 2, \dots, 2n$ v libovolném pořadí. Kolika nejméně tahy lze vždy dosáhnout toho, aby všech $2n$ žetonů bylo v dolním řádku rozmístěno *vzestupně*, tj. v pořadí jako na začátku původní úlohy?
4. Jsou dána dvě lichá přirozená čísla k a n . Martin pro každá dvě přirozená čísla i, j splňující $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq n$ napsal na tabuli zlomek i/j . Určete medián všech těchto zlomků, tedy takové reálné číslo q , že pokud všechny zlomky na tabuli seřadíme podle hodnoty od nejmenší po největší (zlomky se stejnou hodnotou v libovolném pořadí), uprostřed tohoto seznamu bude zlomek s hodnotou q . (Martin Melicher)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Martin napsal na tabuli hodnotu rozdílu $i/j - j/i$ pro každou dvojici přirozených čísel $i \leq 5, j \leq 5$. Určete medián všech čísel na tabuli.
- N2. Řešte soutěžní úlohu pro případ $k = n$.
- N3. Řešte soutěžní úlohu pro případ $n = 3$.

* Hru si můžete vyzkoušet na <http://skmo.sk/72a3>.

- N4. Dokažte, že pro libovolnou čtveřici reálných čísel a, b, c a d , kde přitom $b > 0$ a $d > 0$, platí implikace

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

- D1. Napišme na tabuli součet $a+b+c+d+e$ pro každou pětici (a, b, c, d, e) přirozených čísel menších než 6. Určete medián všech 5^5 čísel na tabuli.
- D2. Necht k, n jsou lichá přirozená čísla. Pro každá dvě přirozená čísla $i \leq k, j \leq n$ napišme na tabuli zlomek $(i-j)/(i+j)$. Určete medián všech těchto zlomků. Využijte k tomu výsledku soutěžní úlohy.
- D3. Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než 2006, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než 2006.
- D4. Martin pro každou neprázdnou podmnožinu M množiny $\{0, 1, \dots, 16\}$ napsal na tabuli zbytek součtu všech prvků z M po dělení číslem 17. Určete, který zbytek má na tabuli největší počet výskytů.
- D5. *Zlomkovou částí* $\{x\}$ reálného čísla x nazýváme číslo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x (viz soutěžní úlohu 1). Uvažujme jednak medián čísel $\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \dots, \{\sqrt{999\,999}\}$, jednak medián čísel $\{\sqrt[3]{1}\}, \{\sqrt[3]{2}\}, \dots, \{\sqrt[3]{999\,999}\}$. Který z těchto mediánů je větší?
5. Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC . Osa vnitřního úhlu u vrcholu A a osy stran AB, AC vymezují trojúhelník. Dokažte, že průsečík jeho výšek leží na těžnici z vrcholu A .
(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Necht X je vnitřní bod trojúhelníku ABC . Dokažte, že X leží na jeho těžnici z vrcholu A , právě když trojúhelníky ABX a ACX mají stejný obsah.
Úmluva. V úlohách N2–N4 budeme zkoumat situaci ze soutěžní úlohy. Necht tedy v ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC značí M střed strany AB , K a L průsečíky osy úhlu při vrcholu A po řadě s osami stran AB a AC , jejichž průsečík je označen O ; konečně H značí průsečík výšek trojúhelníku KLO .
- N2. Dokažte, že vzdálenost bodu H od přímky AC je rovna $|KM|$.
- N3. Necht přímka HK protíná stranu AB v bodě E a přímka HL stranu AC v bodě F . Dokažte, že přímka AH dělí úsečku EF na dva shodné úseky.
- N4. Při označení z úlohy N3 dokažte, že trojúhelníky EMK a FNL jsou podobné.
- D1. Užitím výsledku úlohy N1 dokažte známé tvrzení, že těžnice libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě.
- D2. V trojúhelníku ABC označme D průsečík osy úhlu BAC se stranou BC . Dokažte, že $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$.
- D3. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protne jemu opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C , osu strany BC protne v bodě P a osu strany AC v bodě Q . Střed strany BC označíme K a střed strany AC označíme L . Dokažte, že trojúhelníky RPK a RQL mají stejný obsah.

6. Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou následovně:

$$a_1 = 3 \quad a \quad a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} - 1 \text{ pro všechna } n \geq 2.$$

Dokažte, že existuje

- a) nekonečně mnoho prvočísel dělících alespoň jeden člen této posloupnosti;
 b) nekonečně mnoho prvočísel nedělících žádný člen této posloupnosti.

(Martin Melicher)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

V úlohách N1–N4 a D1 značí $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost ze zadání soutěžní úlohy.

- N1. Dokažte, že každé dva členy a_m, a_n jsou v případě $m \neq n$ dvě nesoudělná čísla.
 N2. Pro každé $n \geq 3$ vyjádřete a_n pouze pomocí a_{n-1} .
 N3. Necht $p \geq 3$ je prvočíslo a necht $p \mid a_n - 1$ pro nějaké n . Dokažte, že $p \nmid a_m$ platí pro každé $m \geq n$.
 N4. Necht $p \geq 3$ je prvočíslo a necht $p \mid a_n - 1$ pro nějaké n . Dokažte, že $p \nmid a_m$ platí pro každé $m < n$.
 D1. Dokažte, že čísla $a_m^2 + a_m + 1$ a $a_n^2 + a_n + 1$ jsou v případě $m > n \geq 2$ nesoudělná.
 D2. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, z nichž každé je dělitelem součtu $2^{2^n} + 1$ pro nějaké přirozené číslo n .
 D3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, z nichž každé je dělitelem rozdílu $2^{2^{n-1}} - 1$ pro nějaké přirozené číslo n .
 D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která nejsou děliteli součtu $2^{2^n} + 1$ pro žádné přirozené číslo n .
 D5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která nejsou děliteli rozdílu $2^{2^{n-1}} - 1$ pro žádné přirozené číslo n .

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2x + \lfloor y \rfloor = 2022,$$

$$3y + \lfloor 2x \rfloor = 2023.$$

(Symbol $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část reálného čísla a , tj. největší celé číslo, které není větší než a . Např. $\lfloor 1,9 \rfloor = 1$ a $\lfloor -1,1 \rfloor = -2$.) (Jaroslav Švirček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\lfloor 3x + 5 \rfloor = 10$. $[x \in \langle \frac{5}{3}, 2 \rangle]$. Reálné číslo x splňuje danou rovnici, právě když $10 \leq 3x + 5 < 11$. Všechna řešení této soustavy dvou nerovnic tvoří interval $\langle \frac{5}{3}, 2 \rangle$.

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $x + \lfloor 2y \rfloor = 8$, $\lfloor 3x \rfloor - y = 3$. $[(x, y) = (2, 3)]$. Podle první rovnice je číslo x celé, podle druhé je rovněž číslo y celé. Tím pádem $\lfloor 2y \rfloor = 2y$ a $\lfloor 3x \rfloor = 3x$, takže máme soustavu $x + 2y = 8$, $3x - y = 3$. Ta má jediné řešení $(x, y) = (2, 3)$, což je i řešení původní soustavy (neboť obě čísla x, y vyšla celá).

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $3x + \lfloor y \rfloor = 10$, $\lfloor 4x \rfloor + x + y = 17$. [Dvě řešení $(x, y) = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ a $(x, y) = (\frac{11}{3}, -\frac{2}{3})$]. Podle první rovnice je číslo $3x$ celé, podle druhé je rovněž číslo $x + y$ celé. Tím pádem nastane jeden ze tří případů: a) Číslo x je celé. Pak i čísla y a $4x$ jsou celá. Dostáváme soustavu $3x + y = 10$, $5x + y = 17$, která však nemá řešení v oboru celých čísel. b) Číslo x je tvaru $x = x' + \frac{1}{3}$, kde x' je celé číslo. Pak $y = y' + \frac{2}{3}$ pro nějaké celé číslo y' a $\lfloor 4x \rfloor = 4x' + 1$. Dostaneme tak soustavu $3x' + y' = 9$, $5x' + y' = 15$ s jedním řešením $(x', y') = (3, 0)$, kterému odpovídá řešení $(x, y) = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ původní soustavy. c) Číslo x je tvaru $x = x' + \frac{2}{3}$, kde x' je celé číslo. Pak $y = y' + \frac{1}{3}$ pro nějaké celé číslo y' a $\lfloor 4x \rfloor = 4x' + 2$. Tentokrát nám vyjde soustava $3x' + y' = 8$, $5x' + y' = 14$ s jedním řešením $(x', y') = (3, -1)$, kterému odpovídá řešení $(x, y) = (\frac{11}{3}, -\frac{2}{3})$ původní soustavy.]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $\lfloor x + y \rfloor = x - y$, $\lfloor 5y + x \rfloor = 5y - x$. [Dvě řešení $(x, y) = (0, 0)$ a $(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$]. Jelikož obě čísla $x - y$ a $5y - x$ jsou celá, jejich součet rovný $4y$ je rovněž celé číslo. Proto ze zadaných rovnic plyne $5y - x = \lfloor 5y + x \rfloor = \lfloor 4y + (y + x) \rfloor = 4y + \lfloor y + x \rfloor = 4y + (x - y) = 3y + x$, tj. $5y - x = 3y + x$, odkud nutně $y = x$. Původní soustavu pak lze zapsat jako dvojici rovnic $\lfloor 2x \rfloor = 0$ a $\lfloor 6x \rfloor = 4x$. Této soustavě vyhovují právě ta reálná x , pro něž současně platí $0 \leq 2x < 1$, $4x \leq 6x < 4x + 1$ a přitom číslo $4x$ je celé. Protože všechny nerovnice z poslední věty jsou splněny pouze pro $x \in (0, \frac{1}{2})$, vyhovují právě hodnoty $x = 0$ a $x = \frac{1}{4}$.

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Na polopřímkách opačných k CA a BA leží postupně body B' a C' tak, že $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC .

(Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový (tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici), právě když platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. [a) Necht vrcholy A, B, C, D leží na kružnici se středem S . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu pak platí $|\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle ACD|$. b) Necht naopak platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. Označme S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABD, ACD . Oba tyto středy leží na ose úsečky AD a ve stejné polorovině s hraniční přímkou AD . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu navíc platí $|\sphericalangle AS_1D| = 2|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle AS_2D|$. Dohromady už dostáváme, že $S_1 = S_2$, takže kružnice opsané trojúhelníkům ABD, ACD splývají.]
- N2. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový, právě když součet velikostí úhlů ABC a ADC je 180° . [a) Necht vrcholy A, B, C, D leží na kružnici se středem S . Konvexní a nekonvexní úhel ASC se doplňují do úhlu 360° . Součet velikostí těchto dvou středových úhlů je roven dvojnásobku součtu velikostí obvodových úhlů ABC a ADC , který sám je tudíž roven 180° . b) Necht naopak platí $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ$. V případě, kdy oba úhly ABC, ADC jsou pravé, plyne potřebný závěr z Thaletovy věty. V opačném případě můžeme předpokládat, že např. úhel ABC je ostrý a úhel ADC je tupý. Pak uvnitř poloroviny ACB leží jak střed S_1 kružnice opsané trojúhelníku ABC , tak i střed S_2 kružnice opsané trojúhelníku ADC , přitom oba konvexní úhly AS_1C a AS_2C mají po řadě velikosti $2|\sphericalangle ABC|$ a $360^\circ - 2|\sphericalangle ADC|$, které jsou díky předpokladu stejné. Navíc oba body S_1, S_2 leží na ose úsečky AC , takže dohromady dostáváme $S_1 = S_2$, a tedy kružnice opsané trojúhelníkům ABC, ADC splývají.]
- N3. Dokažte tvrzení „o Švrčkově bodu“: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na kterém neleží vrchol A . [Označme $S \neq A$ druhý průsečík osy úhlu BAC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC . V tětiovém čtyřúhelníku $ABSC$ platí $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle BCS|$. To znamená, že BSC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC , tudíž S je střed příslušného oblouku BC . Jinak lze využít obecnější tvrzení: dva obvodové úhly v téže kružnici jsou shodné, právě když jsou shodné oblouky, kterým tyto obvodové úhly odpovídají.]
- D1. Dokažte tvrzení „o třech prstech“: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na kterém neleží vrchol A . Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$. [Stačí zřejmě dokázat jen jednu rovnost $|SB| = |SI|$. Při standardním značení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Protože SIB je vnější úhel trojúhelníku ABI , platí rovněž

$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

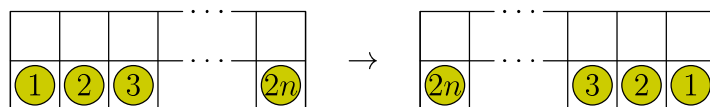
Trojúhelník SIB tak skutečně má shodná ramena SB a SI .]

- D2. Dokažte, že osa vnějšího úhlu při vrcholu A libovolného trojúhelníku ABC prochází středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , na

kterém leží vrchol A . [Označme $N \neq A$ druhý průsečík osy vnějšího úhlu při vrcholu A s kružnicí opsanou (v případě $|AB| = |AC|$, kdy se tato osa kružnice opsané pouze dotýká, je tvrzení úlohy zřejmé). Uvažme rovněž bod S z úlohy N3. Protože S leží na ose vnitřního úhlu, N na ose vnějšího úhlu a tyto dvě osy jsou navzájem kolmé, platí $|\sphericalangle SAN| = 90^\circ$. Podle Thaletovy věty je pak SN průměrem kružnice opsané. Jelikož S je přitom střed jejího oblouku BC neobsahujícího bod A , N je střed druhého oblouku BC .]

- D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Uvnitř strany AB leží bod D a na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|BD| = |CE|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ADE mají kromě bodu A ještě další společný bod na ose úhlu BAC . [Na polopřímky opačné k CA a BA dokreslíme po řadě body B' a C' určené rovnostmi $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Podle výsledku soutěžní úlohy střed kružnice opsané $\triangle AB'C'$ leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Tento výsledek můžeme uplatnit k $\triangle AB'C'$ ještě jednou, když za výchozí vezmeme trojúhelník ADE a přihlídneme k rovnostem $|B'E| = |B'C| - |CE| = |AB| - |BD| = |AD|$ a $|C'D| = |C'B| + |BD| = |AC| + |CE| = |AE|$. Střed kružnice opsané $\triangle AB'C'$ leží proto rovněž na kružnici opsané $\triangle ADE$. Našli jsme tak průsečík kružnic opsaných $\triangle ABC$ a $\triangle ADE$, který je různý od bodu A a který leží na ose úhlu BAC – jde totiž o střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a ten je podle osy úhlu BAC souměrný, neboť obě jeho strany AB' , AC' mají délku $|AB| + |AC|$. Jiný postup: Označme S střed kratšího oblouku BC kružnice opsané $\triangle ABC$. Z tětívového čtyřúhelníku $ABSC$ máme $|\sphericalangle DBS| = |\sphericalangle ECS|$, a proto trojúhelníky DBS a ECS jsou shodné podle věty *sus*. Odtud $|\sphericalangle ADS| = 180^\circ - |\sphericalangle SDB| = 180^\circ - |\sphericalangle SEC| = 180^\circ - |\sphericalangle SEA|$, takže podle úlohy N2 je rovněž čtyřúhelník $ADSE$ tětívový.]

3. Pro dané kladné celé číslo n uvažme obdélníkový hrací plán $2n \times 2$ a na něm $2n$ žetonů očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$ a rozmístěných jako na obrázku vlevo. V jednom tahu je možné posunout jeden žeton z jeho políčka na políčko sousedící stranou, pokud je prázdné.* Kolika nejméně tahy lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo?



(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Uvažujme situaci soutěžní úlohy pro $n = 3$. *Vodorovným* nazveme každý tah, při kterém je žeton posunut v řádku. Udejte příklad posloupnosti tahů, kterou splníme cíl úlohy a která přitom obsahuje nejmenší možný počet vodorovných tahů. [Tabulka má šest sloupců, proto s žetonem 1 musíme provést aspoň 5 tahů doprava, s žetonem 2 aspoň 3 doprava, s žetonem 3 aspoň 1 doprava,

* Hru si můžete vyzkoušet na <http://skmo.sk/72a3>.

s žetonem 4 aspoň 1 doleva, s žetonem 5 aspoň 3 doleva a s žetonem 6 aspoň 5 doleva. Celkem tak potřebujeme aspoň 18 vodorovných tahů. Vyhovující příklad s 18 vodorovnými tahy: Nejprve přesuneme žetony 2 až 6 nahoru, pak žeton 1 do jeho cíle, následně žetony 2 až 5 dolů a poté žeton 6 do jeho cíle. Takto jsme vodorovnými tahy pouze s žetony 1, 6 dosáhli toho, že se prohodily. Podobně pak prohodíme žetony 2, 5 a nakonec žetony 3, 4.]

- N2. Rovnost $1 + 2 + 4 + 5 + \dots + (3n - 2) + (3n - 1) = 3n^2$ dokažte pro každé přirozené číslo n . [Užijeme indukci vzhledem k číslu n . Pro $n = 1$ rovnost platí $(1 + 2 = 3 \cdot 1^2)$. Platí-li pro nějaké $n = k$, pak pro $n = k + 1$ ji odvodíme takto: $1 + 2 + \dots + (3k + 1) + (3k + 2) = 3k^2 + (3k + 1) + (3k + 2) = 3k^2 + 6k + 3 = 3(k + 1)^2$. Jiný postup: Sečtete $2n$ rovností $i + (3n - i) = 3n$ pro $i \in \{1, 2, \dots, 3n - 2, 3n - 1\}$ a výslednou rovnost vydělte dvěma.]
- N3. Zdůvodněte, že v průběhu tahů vedoucích k cíli soutěžní úlohy se z každých dvou žetonů musí aspoň jeden někdy dostat do horního řádku hracího plánu. [Uvažme žetony i a j , kde $i < j$. Na začátku je i nalevo od j , ale na konci je i napravo od j . Takto by se jejich pořadí v dolním řádku nemohlo vyměnit, kdyby oba žetony byly v tomto řádku pořád.]
- D1. Uvažujme stejné počáteční rozestavení $2n$ žetonů jako v soutěžní úloze. Kolika nejméně tahy lze získat rozestavení, kdy opět všechny žetony budou v dolním řádku, avšak žeton 1 se ocitne v posledním sloupci? [$4n$ tahů. V prvním tahu musíme posunout nějaký žeton nahoru a někdy později ho posunout dolů. S žetonem 1 musíme vykonat aspoň $2n - 1$ tahů doprava. Abychom vysvětlili, že celkový počet tahů doleva je rovněž alespoň $2n - 1$, označme sloupce zleva doprava čísly 1 až $2n$ a uvažujme proměnnou veličinu, která je rovna součtu $2n$ čísel těch sloupců, ve kterých se jednotlivé z $2n$ žetonů aktuálně nacházejí. Tato veličina má v počátečním i koncovém rozestavení tutéž hodnotu (rovnou $1 + 2 + \dots + 2n$), s každým tahem doprava vzroste o 1, s každým tahem doleva klesne o 1 a při tazích ve sloupcích se nemění – proto musí být celkové počty tahů doprava a tahů doleva dokonce stejné. Dokázali jsme tak, že tahů všemi směry musí být alespoň $2 + (2n - 1) + (2n - 1) = 4n$. Počet $4n$ tahů stačí: žeton 1 posuneme nahoru, pak všechny ostatní o 1 políčko doleva a nakonec žeton 1 do posledního sloupce a dolů.]
- D2. V jedné řadě stojí n žetonů postupně s čísly od 1 do n . V každém tahu můžeme navzájem vyměnit dva sousední žetony. Kolika nejméně tahy lze původní pořadí žetonů změnit na opačné, tj. s čísly od n do 1? [$\frac{n(n-1)}{2}$ tahů. Každou dvojici žetonů musíme někdy (jako sousední dva žetony) přehodit. Protože všech dvojic je $\frac{n(n-1)}{2}$, potřebujeme aspoň $\frac{n(n-1)}{2}$ tahů. Tolik tahů skutečně stačí – přesuneme například nejprve žeton 1 na poslední místo ($n - 1$ tahů), pak žeton 2 na předposlední místo ($n - 2$ tahů) atd., až nakonec žeton $n - 1$ na druhé místo (1 tah). Tak vykonáme právě $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ tahů.]
- D3. V situaci ze soutěžní úlohy je tentokrát v dolním řádku rozmístěno $2n$ žetonů s čísly 1, 2, ..., $2n$ v libovolném pořadí. Kolika nejméně tahy lze vždy dosáhnout toho, aby všech $2n$ žetonů bylo v dolním řádku rozmístěno *vzestupně*, tj. v pořadí jako na začátku původní úlohy? [Tento počet je stejný jako počet tahů v soutěžní úloze (který zde prozrazovat nebudeme). Nejprve dokážeme matematickou

indukcí následující tvrzení. Necht k je přirozené číslo. Uvažujme hrací plán $k \times 2$, na kterém je (pouze) v horním řádku nějaký počet žetonů s určitými navzájem různými čísly vybranými z množiny $\{1, 2, \dots, k\}$. Pak existuje taková posloupnost tahů, která pro každé i přemístí žeton s číslem i (pokud na plánu je) na dolní políčko i -tého sloupce a která k tomu pro každý žeton využije nejmenší možný počet tahů. Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí. Necht je nyní $k \geq 2$ a necht pro všechny hrací plány $k' \times 2$, kde $k' < k$, tvrzení platí. Na zadaném plánu $k \times 2$ (který splňuje předpoklady tvrzení) vezměme žeton s největším číslem, označme je i , tento žeton posuňme dolů a pak ho přesuňme do i -tého sloupce. Následně díky indukčnímu předpokladu přesuneme na správná místa všechny žetony, které se nacházejí v prvních $i - 1$ sloupcích. Poté budeme po jednom zleva přesunovat ještě žetony, které v zadaném plánu $k \times 2$ případně zůstaly od i -tého sloupce napravo: Každý z nich, má-li číslo j , přesuneme nejdříve doleva do j -tého sloupce a potom dolů. Sestavili jsme tak pro zadaný plán $2 \times k$ posloupnost tahů, která má zřejmě všechny potřebné vlastnosti; důkaz indukci je tak ukončen.

Přejdeme k vlastní úloze D3. Při libovolné výchozí situaci s tahy začneme tak, že všechny žetony – kromě toho s číslem $2n$ – posuneme nahoru a pak žeton $2n$ přesuneme na poslední místo (pokud už tam nestál). Následně k žetonům z prvních $2n - 1$ sloupců uplatníme posloupnost tahů z dokázaného tvrzení. Nakonec pak na správné místo přesuneme případný žeton z horního políčka posledního sloupce. Při takové konstrukci bude počet tahů největší, budou-li na začátku žetony uspořádány sestupně. V tomto případě optimálnost konstrukce plyne z řešení původní úlohy.]

4. Jsou dána dvě lichá přirozená čísla k a n . Martin pro každá dvě přirozená čísla i, j splňující $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq n$ napsal na tabuli zlomek i/j . Určete medián všech těchto zlomků, tedy takové reálné číslo q , že pokud všechny zlomky na tabuli seřadíme podle hodnoty od nejmenší po největší (zlomky se stejnou hodnotou v libovolném pořadí), uprostřed tohoto seznamu bude zlomek s hodnotou q . (Martin Melicher)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Martin napsal na tabuli hodnotu rozdílu $i/j - j/i$ pro každou dvojici přirozených čísel $i \leq 5$, $j \leq 5$. Určete medián všech čísel na tabuli. [Medián je 0, protože vždy, když je rozdíl $i/j - j/i$ kladný, je opačný rozdíl $j/i - i/j$ záporný a naopak. Podrobněji: označme $f(i, j) = i/j - j/i$, pak na tabuli je 25 čísel, z nich 5 – $f(1, 1)$, $f(2, 2)$, $f(3, 3)$, $f(4, 4)$ a $f(5, 5)$ – je rovno 0. Zbýlých 20 čísel rozdělíme do 10 dvojic: každé číslo $f(i, j)$, kde $i \neq j$, spárujeme s číslem $f(j, i)$. V každé dvojici je zřejmě jedno číslo kladné a jedno číslo záporné. Na tabuli je tak 10 čísel kladných, 10 záporných a 5 nul. Medián je proto 0.]
- N2. Řešte soutěžní úlohu pro případ $k = n$. [V tomto případě je medián 1. Podobně jako v úloze N1 vyčleníme zvláště zlomky i/i s hodnotou 1 – těch je k , tedy lichý počet. Ostatní zlomky zase rozdělíme do dvojic: každý zlomek i/j spárujeme s převráceným zlomkem j/i . V každé dvojici je zřejmě jeden zlomek menší než 1 a jeden zlomek větší než 1. Zlomků menších než 1 je tedy stejný počet jako zlomků větších než 1, takže 1 je medián.]

- N3. Řešte soutěžní úlohu pro případ $n = 3$. [V tomto případě je medián $(k + 1)/4$. Na tabuli máme pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ napsány tři zlomky $i/1$, $i/2$, $i/3$. Zaměříme se nejprve na zlomky $i/2$. Protože k je liché, ve vzestupném pořadí těchto zlomků stojí uprostřed zlomek $\frac{1}{2}(1/2 + k/2) = (k + 1)/4$, který tak je jejich mediánem. Porovnáme s ním nyní ostatních $2k$ zlomků $i/1$ a $i/3$ s čitateli i od 1 do k . Využijeme k tomu jednak ekvivalence

$$\frac{i}{1} < \frac{k+1}{4} \Leftrightarrow (k+1) - i > \frac{3(k+1)}{4} \Leftrightarrow \frac{k+1-i}{3} > \frac{k+1}{4},$$

jednak tytéž ekvivalence s opačnými znaky ostrých nerovností. Plyne z nich, že počet těch zlomků $i/1$, které jsou menší (resp. větší) než $(k + 1)/4$, je stejný jako počet těch zlomků $i/3$, které jsou větší (resp. menší) než $(k + 1)/4$. Odtud už plyne, že $(k + 1)/4$ je hledaný medián všech $3k$ zlomků.]

- N4. Dokažte, že pro libovolnou čtveřici reálných čísel a , b , c a d , kde přitom $b > 0$ a $d > 0$, platí implikace

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

[Nerovnosti z pravé strany implikace jsou ekvivalentní s nerovnostmi $a(b + d) < (a + c)b$, resp. $(a + c)d < c(b + d)$. Ty jsou zřejmě obě ekvivalentní s nerovností $ad < bc$, jež je důsledkem nerovnosti z levé strany implikace.]

- D1. Napišme na tabuli součet $a + b + c + d + e$ pro každou pětici (a, b, c, d, e) přirozených čísel menších než 6. Určete medián všech 5^5 čísel na tabuli. [Medián je 15. Pětici $(3, 3, 3, 3, 3)$ se součtem 15 dejme stranou a ostatní pětice rozdělme do dvojic tak, že každou pětici (a, b, c, d, e) spárujeme s pětici $(6 - a, 6 - b, 6 - c, 6 - d, 6 - e)$. V každé dvojici buď obě pětice mají součet 15, nebo jedna pětice má součet menší než 15 a druhá pětice má součet větší než 15.]
- D2. Necht k , n jsou lichá přirozená čísla. Pro každá dvě přirozená čísla $i \leq k$, $j \leq n$ napišme na tabuli zlomek $(i - j)/(i + j)$. Určete medián všech těchto zlomků. Využijte k tomu výsledku soutěžní úlohy. [Ukažte, že pro kladná čísla a , b , c , d platí $(a - b)/(a + b) < (c - d)/(c + d)$, právě když $a/b < c/d$. Z hlediska uspořádání hodnot zlomků je tedy situace na tabuli stejná jako v soutěžní úloze. Označíme-li proto x/y medián ze soutěžní úlohy, bude hledaný medián roven $(x - y)/(x + y)$.]
- D3. Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než 2006, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než 2006. [56-A-S-2]
- D4. Martin pro každou neprázdnou podmnožinu M množiny $\{0, 1, \dots, 16\}$ napsal na tabuli zbytek součtu všech prvků z M po dělení číslem 17. Určete, který zbytek má na tabuli největší počet výskytů. [Zbytek 0. Ukážeme, že pokud bychom na tabuli nezapsali zbytek součtu prvků celé množiny $\{0, 1, \dots, 16\}$, tak každý zbytek od 0 do 16 by měl na tabuli stejný počet výskytů. K důkazu uvažme všechny k -prvkové podmnožiny $\{0, 1, \dots, 16\}$ s pevným k od 1 do 16. Rozdělme tyto podmnožiny do 17prvkových skupin tak, že v každé skupině budeme mít s každou množinou $\{x_1, \dots, x_k\}$ následujících 16 množin (sčítání dále chápeme jako operaci se zbytky modulo 17): $\{1 + x_1, \dots, 1 + x_k\}$, $\{2 + x_1, \dots, 2 + x_k\}$, \dots ,

$\{16 + x_1, \dots, 16 + x_k\}$. Zbytky součtů prvků jednotlivých 17 množin v každé skupině tedy budou zbytky $\sum x_i, k + \sum x_i, 2k + \sum x_i, \dots, 16k + \sum x_i$. V tomto seznamu zbytků bude každý ze 17 možných zbytků zastoupen právě jednou, a to díky nesoudělnosti čísel k a 17. Protože to platí pro každou vytvořenou skupinu, každý zbytek bude zbytkem součtů prvků stejného počtu k -prvkových podmnožin, a to pro každé k od 1 do 16. Tím je slíbený důkaz hotov. Protože nezahrnutá 17prvková množina $\{0, 1, \dots, 16\}$ má součet prvků 136 se zbytkem 0, je tento zbytek zapsán na tabuli v počtu o 1 větším než každý jiný ze 16 zbytků.]

- D5. *Zlomkovou částí* $\{x\}$ reálného čísla x nazýváme číslo $\{x\} = x - [x]$, kde $[x]$ značí celou část čísla x (viz soutěžní úlohu 1). Uvažujme jednak medián čísel $\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \dots, \{\sqrt{999\,999}\}$, jednak medián čísel $\{\sqrt[3]{1}\}, \{\sqrt[3]{2}\}, \dots, \{\sqrt[3]{999\,999}\}$. Který z těchto mediánů je větší? [Větší je druhý medián. Nechť n je přirozené číslo. Všimněme si, že pro celá čísla i od n^2 do $n^2 + n$, kterých je $n + 1$, platí $n \leq \sqrt{i} < n + \frac{1}{2}$, takže $\{\sqrt{i}\} < \frac{1}{2}$. Podobně pro celá čísla i od $n^2 + n + 1$ do $n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1$, kterých je n , platí $\{\sqrt{i}\} > \frac{1}{2}$. Porovnáním obou počtů i zjišťujeme, že pro *nejtěsnější většinu* celých čísel i z intervalu $\langle n^2, (n + 1)^2 - 1 \rangle$ je hodnota $\{\sqrt{i}\}$ menší než $\frac{1}{2}$. Necháme-li n probíhat hodnoty od 1 do 999, uvažované intervaly disjunktně pokryjí celá čísla právě v rozpětí od 1 do 999 999. Proto je v první zadané posloupnosti většina čísel menších než $\frac{1}{2}$, tudíž je takový i jejich medián. Podobně se nyní pro přirozené n podívejme na hodnoty $\{\sqrt[3]{i}\}$ pro celá čísla i z intervalu $\langle n^3, (n + 1)^3 - 1 \rangle$. Pro uvažované i platí $\{\sqrt[3]{i}\} < \frac{1}{2}$, právě když $i < (n + \frac{1}{2})^3 = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$. Počet dotýčných i , které splňují poslední podmínku, je tedy právě $[\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}] + 1$, což nepřevyšuje hodnotu $\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{9}{8}$, která je díky $n \geq 1$ menší než $\frac{1}{2}[(n + 1)^3 - n^3]$. Nerovnost $\{\sqrt[3]{i}\} < \frac{1}{2}$ tak splňuje *menšina* celých čísel i ze zkoumaného intervalu. Vezmeme-li nyní n od 1 do 99, tyto intervaly disjunktně pokryjí celá čísla právě v rozpětí od 1 do 999 999. Proto je v druhé zadané posloupnosti většina čísel větších než $\frac{1}{2}$, tudíž je takový i jejich medián. Dohromady dostáváme, že druhý medián je větší než první.]

5. Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC . Osa vnitřního úhlu u vrcholu A a osy stran AB, AC vymezují trojúhelník. Dokažte, že průsečík jeho výšek leží na těžnici z vrcholu A .
(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Úmluva. V řešeních úloh budeme obsah trojúhelníku XYZ značit $[XYZ]$.

- N1. Nechť X je vnitřní bod trojúhelníku ABC . Dokažte, že X leží na jeho těžnici z vrcholu A , právě když trojúhelníky ABX a ACX mají stejný obsah. [Označme D průsečík polopřímky AX se stranou BC . Trojúhelníky ADB a ADC mají společnou výšku z vrcholu A , proto $[ADB] : [ADC] = |DB| : |DC|$. Podobně také $[XDB] : [XDC] = |DB| : |DC|$. Dohromady dostáváme

$$\frac{[ABX]}{[ACX]} = \frac{[ADB] - [XDB]}{[ADC] - [XDC]} = \frac{\frac{|DB|}{|DC|} \cdot [ADC] - \frac{|DB|}{|DC|} \cdot [XDC]}{[ADC] - [XDC]} = \frac{|DB|}{|DC|}.$$

Vidíme, že trojúhelníky ABX a ACX mají stejný obsah, právě když $|DB| = |DC|$, tj. právě když D je střed BC neboli AD je těžnice trojúhelníku ABC . Jiný postup: Spojme vnitřní bod X s vrcholy A, B, C a středem D strany BC . Protože $[XBD] = [XCD]$, rovnost $[ABX] = [ACX]$ nastane, právě když $[ABX] + [XBD] = [ACX] + [XCD]$, tedy právě když dvojice úseček AX, XD půlí obsah trojúhelníku ABC . To zřejmě platí, pokud X leží na úsečce AD , a navíc to zřejmě neplatí, leží-li X uvnitř jednoho z trojúhelníků ABD, ACD .]

Úmluva. V úlohách N2–N4 budeme zkoumat situaci ze soutěžní úlohy. Nechtě tedy v ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC značí M střed strany AB , K a L průsečíky osy úhlu při vrcholu A po řadě s osami stran AB a AC , jejichž průsečík je označen O ; konečně H značí průsečík výšek trojúhelníku KLO .

- N2. Dokažte, že vzdálenost bodu H od přímky AC je rovna $|KM|$. [Z $KH \perp LN \perp AC$ máme $KH \parallel AC$. Tím pádem vzdálenost H od AC je stejná jako vzdálenost K od AC . Jelikož K leží na ose úhlu BAC , má od AC stejnou vzdálenost jako od AB , tedy $|KM|$.]
- N3. Nechtě přímka HK protíná stranu AB v bodě E a přímka HL stranu AC v bodě F . Dokažte, že přímka AH dělí úsečku EF na dva shodné úseky. [Platí $HE \parallel AC$ a $HF \parallel AB$, takže $AEHF$ je rovnoběžník. Jeho úhlopříčky EF a AH se proto navzájem půlí.]
- N4. Při označení z úlohy N3 dokažte, že trojúhelníky EMK a FNL jsou podobné. [Plyne to z věty uu , protože trojúhelníky mají u vrcholů M, N pravé úhly a také jejich úhly u vrchoů E, F jsou shodné (díky rovnoběžníku $AEHF$, viz řešení N3).]
- D1. Užítím výsledku úlohy N1 dokažte známé tvrzení, že těžnice libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě. [V trojúhelníku ABC označme T průsečík těžnic z vrcholů B a C . Z úlohy N1 víme, že $[ABT] = [BCT]$ a $[BCT] = [ACT]$, odkud $[ABT] = [ACT]$, tudíž opět podle úlohy N1 bod T leží na těžnici z vrcholu A .]
- D2. V trojúhelníku ABC označme D průsečík osy úhlu BAC se stranou BC . Dokažte, že $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$. [Trojúhelníky ABD a ACD mají společnou výšku z vrcholu A , proto $[ABD] : [ACD] = |BD| : |DC|$. Zároveň však mají shodné výšky z vrcholu D , takže $[ABD] : [ACD] = |AB| : |AC|$. Z obou rovností už plyne potřebný závěr.]
- D3. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protne jemu opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C , osu strany BC protne v bodě P a osu strany AC v bodě Q . Střed strany BC označíme K a střed strany AC označíme L . Dokažte, že trojúhelníky RPK a RQL mají stejný obsah. [IMO 2007, úloha 4, řeš. [IMO Shortlist 2007, Problem G1](#).]

6. Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou následovně:

$$a_1 = 3 \quad a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} - 1 \text{ pro všechna } n \geq 2.$$

Dokažte, že existuje

- a) nekonečně mnoho prvočísel dělících alespoň jeden člen této posloupnosti;
 b) nekonečně mnoho prvočísel nedělících žádný člen této posloupnosti.

(Martin Melicher)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

V úlohách N1–N4 a D1 značí $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost ze zadání soutěžní úlohy.

- N1. Dokažte, že každé dva členy a_m, a_n jsou v případě $m \neq n$ dvě nesoudělná čísla. [Je-li $m > n$ neboli $m - 1 \geq n$, pak z rovnosti $a_m = a_1 a_2 a_3 \dots a_{m-1} - 1$ plyne $a_n \mid a_m + 1$. Pro největší společný dělitel D čísel a_m, a_n tak platí $D \mid a_m$ a zároveň $D \mid a_n \mid a_m + 1$, takže rovněž $D \mid (a_m + 1) - a_m = 1$, tj. $D = 1$.]
- N2. Pro každé $n \geq 3$ vyjádřete a_n pouze pomocí a_{n-1} . [$a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-2}) a_{n-1} - 1 = (a_{n-1} + 1) a_{n-1} - 1 = a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1$.]
- N3. Necht $p \geq 3$ je prvočíslo a necht $p \mid a_n - 1$ pro nějaké n . Dokažte, že $p \nmid a_m$ platí pro každé $m \geq n$. [Jelikož $p \geq 3$ a $a_1 - 1 = 2$, tak $n \neq 1$. Z předpokladu $a_n \equiv 1 \pmod{p}$ podle výsledku N2 dostáváme $a_{n+1} \equiv a_n^2 + a_n - 1 \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod{p}$. Matematickou indukcí pak získáváme $a_m \equiv 1 \pmod{p}$ pro každé $m \geq n$. Relace $p \nmid a_m$ je toho důsledkem.]
- N4. Necht $p \geq 3$ je prvočíslo a necht $p \mid a_n - 1$ pro nějaké n . Dokažte, že $p \nmid a_m$ platí pro každé $m < n$. [Připustme, že naopak $p \mid a_m$ pro nějaké $m < n$. To spolu s rovností $a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} - 1$ znamená, že $p \mid a_m \mid a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} = a_n + 1$. Dohromady máme $p \mid a_n - 1$ a $p \mid a_n + 1$, a tedy $p \mid (a_n + 1) - (a_n - 1) = 2$, což odporuje předpokladu $p \geq 3$.]
- D1. Dokažte, že čísla $a_m^2 + a_m + 1$ a $a_n^2 + a_n + 1$ jsou v případě $m > n \geq 2$ nesoudělná. [Necht p je prvočíslo a $p \mid a_n^2 + a_n + 1$. Jelikož $3 = a_1 \mid a_1 a_2 \dots a_{n-1} = a_n + 1$, tak $a_n \equiv 2 \pmod{3}$, a proto $a_n^2 + a_n + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, takže $p \neq 3$. Podle výsledku N2 postupně dostáváme $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 = (a_n^2 + a_n + 1) - 2 \equiv -2 \pmod{p}$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 \equiv (-2)^2 + (-2) - 1 \equiv 1 \pmod{p}$, $a_{n+3} \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod{p}$, dále už matematickou indukcí získáváme $a_k \equiv 1 \pmod{p}$ pro každé $k \geq n + 2$. Proto číslo a_m (s indexem $m > n$) dává po dělení p zbytek -2 nebo 1 , tudíž číslo $a_m^2 + a_m + 1$ dává zbytek 1 nebo 3 . Z toho už plyne potřebný závěr $p \nmid a_m^2 + a_m + 1$, neboť (jak už víme) $p \neq 3$.]
- D2. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, z nichž každé je dělitelem součtu $2^{2^n} + 1$ pro nějaké přirozené číslo n . [Opakovaným uplatněním vzorce $2^{2^k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ dojdeme k rozkladu $2^{2^n} - 1 = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{n-1}} + 1)$. V případě $0 \leq n < m$ tak platí $2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^m} - 1$. Největší společný dělitel dvou lichých čísel $2^{2^n} + 1$ a $2^{2^m} + 1$ je proto také dělitelem čísla $2^{2^m} - 1$ a tudíž i čísla $(2^{2^m} + 1) - (2^{2^m} - 1) = 2$, takže je to nutně číslo 1 . Posloupnost $(2^{2^n} + 1)_{n=0}^{\infty}$ je tudíž složena s navzájem nesoudělných čísel. Přiřadíme-li proto každému n jakýkoli prvočinitel čísla $2^{2^n} + 1$, dostaneme nekonečnou posloupnost navzájem různých prvočísel vyhovujících zadání úlohy.]
- D3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, z nichž každé je dělitelem rozdílu $2^{2^n-1} - 1$ pro nějaké přirozené číslo n . [Nejprve užitím Eukleidova algoritmu dokažte: *Je-li d největší společný dělitel přirozených čísel a a b , pak největším společným dělitelem čísel $2^a - 1$ a $2^b - 1$ je číslo $2^d - 1$.* V důsledku toho platí: Jsou-li p a q dvě různá prvočísla, pak čísla $2^p - 1$ a $2^q - 1$ jsou nesoudělná. Vybereme-li proto ke každému lichému prvočíslu p nějaký prvočinitel čísla $2^p - 1$, dostaneme výběr nekonečně mnoha prvočísel vyhovujících zadání úlohy.]
- D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která nejsou děliteli součtu $2^{2^n} + 1$ pro žádné přirozené číslo n . [Vyhovují všechna prvočísla s vlastností

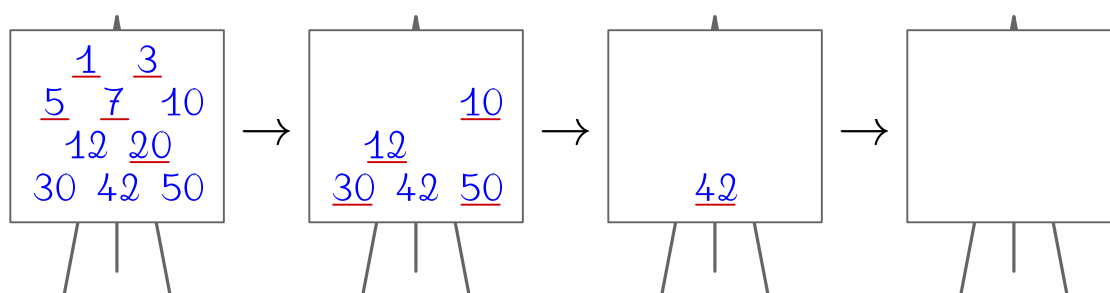
ze zadání úlohy D3 (kterých je nekonečně mnoho). Vezměme libovolné z nich, řekněme p , a vyberme k němu dotýčné n s vlastností $p \mid 2^{2n-1} - 1$. Pripustíme, že pro nějaké přirozené m rovněž platí $p \mid 2^{2^m} + 1$. Protože čísla $2n - 1$ a 2^{m+1} jsou nesoudělná, díky tvrzení uvedenému v řešení D3 jsou rovněž nesoudělná i čísla $2^{2n-1} - 1$ a $2^{2^{m+1}} - 1$. Jelikož však $2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^{m+1}} - 1$, z předpokladu $p \mid 2^{2^m} + 1$ dostáváme $p \mid 2^{2^{m+1}} - 1$, zároveň však $p \mid 2^{2n-1} - 1$, tudíž p je společný dělitel dvou nesoudělných čísel, a to je spor.]

- D5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která nejsou děliteli rozdílu $2^{2n-1} - 1$ pro žádné přirozené číslo n . [Vyhovují všechna prvočísla s vlastností ze zadání úlohy D2 (kterých je nekonečně mnoho). Důkaz sporem je stejný jako v řešení D4, protože vychází z těchže předpokladů: pro některé prvočíslu p se najdou přirozená čísla m, n taková, že $p \mid 2^{2^m} + 1$ a $p \mid 2^{2n-1} - 1$.]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. Na tabuli napíšeme deset navzájem různých přirozených čísel. V každém kroku nejdříve podtrhneme každé číslo, které není součtem žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli, poté všechna podtržená čísla smažeme. Například:



- a) Dokažte, že pro libovolných deset napsaných čísel zůstane po konečném počtu kroků tabule prázdná.
 b) Určete největší počet kroků, po jejichž provedení ještě nemusí zůstat tabule prázdná. Uveďte příklad deseti čísel, pro něž tohoto počtu dosáhneme.

(Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Budeme se zabývat pouze námětem ze soutěžní úlohy.

- N1. Po kolika krocích bude tabule prázdná, pokud je na ní na začátku napsána pětice nejmenších přirozených čísel?
 N2. Kolik nejméně přirozených čísel může být na tabuli napsáno, pokud chceme, aby tabule zůstala prázdná až po dvou krocích?
 N3. Vyřešte variantu soutěžní úlohy, ve které budeme podtrhávat a následně mazat právě ta čísla, která nejsou *součinem* žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli.
 D1. Na začátku můžeme na tabuli napsat libovolnou sedmici různých přirozených čísel obsahující čísla 1 a 2. Najděte všechny takové sedmice, pro které po třech krocích tabule ještě nebude prázdná.
 D2. Jak by se změnil závěr soutěžní úlohy, pokud by na začátku bylo napsáno na tabuli jakýchkoli deset navzájem různých *celých* čísel?
 D3. Mějme nějakou výchozí deseticí různých přirozených čísel, pro kterou po čtyřech krocích tabule ještě nebude prázdná. Může se největší číslo z takové desetice rovnat číslu 35?

2. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. (Jaromír Šimša)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Tabulka 3×3 je vyplněna různými celými čísly tak, že součty tří čísel v každém řádku i sloupci jsou lichá čísla. Mohou být v tabulce a) čísla od 1 do 9, b) čísla od 2 do 10?
- N2. Nechť $k > 1$ je celé číslo. Mějme danu tabulku o k polích, kterou máme vyplnit k danými a navzájem různými čísly (tak, aby každé z nich bylo použito). Dokažte, že počet všech takových vyplnění je roven součinu $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$. Tento součin nazýváme faktoriálem čísla k a značíme symbolem $k!$, který čteme „ k faktoriál“. Klademe také $1! = 1$ a $0! = 1$.
- N3. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 2×2 a čísla od 1 do 4.
- D1. Mějme celá čísla $0 \leq k \leq n$. Kolika způsoby lze z n kuliček různých barev vybrat některých k ?
- D2. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 4 krát 4 a celá čísla od 1 do 16.
- D3. Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \dots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje?

- D4. Je dáno celé číslo $n \geq 2$. Kolika způsoby lze vybarvit políčka tabulky $n \times n$ čtyřmi barvami tak, aby v každém čtverečku 2×2 byla každá barva použita právě jednou?
3. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají kvadratické trojčleny $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$ následující vlastnost: každá z rovnic

$$aP(x) + bQ(x) = 0 \quad \text{a} \quad aQ(x) + bP(x) = 0$$

je kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem.

(Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Rozhodněte, pro které reálné hodnoty parametru p je

$$(p+2)x^2 + 2(p+1)x + (p-1) = 0$$

kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem.

- N2. Necht' reálná čísla r, s, t splňují soustavu dvou rovnic $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Dokažte, že $r = 2s$. Rozmyslete si, jak tento výsledek využít k řešení soutěžní úlohy, když za r, s, t zvolíte vhodné výrazy.
- D1. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen.
- D2. V oboru reálných čísel r, s, t řešte soustavu dvou rovnic z úlohy N2.
- D3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

- a) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.
- b) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen.
- D4. a) Dokažte nerovnost $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b .
- b) Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 + ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b .
- D5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1 \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

4. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokažte, že $|CD| = |DE|$. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Rozmyslete si a zdůvodněte, že pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy lze získat z jistého rovnoběžníku „odstřihnutím“ jednoho jeho „rohu“.
- N2. Připomeňme, že osou libovolného (konvexního i nekonvexního) úhlu s vrcholem V nazýváme tu polopřímku s počátečním bodem P , která daný úhel rozděluje na dva shodné úhly (tj. úhly téže velikosti). Připomeňte si rovněž a dokažte „větu o ose úhlu“: *Osa úhlu AVB , který má velikost menší než 180° , je tvořena právě těmi jeho body, které mají od obou přímek VA, VB stejnou vzdálenost.*
- N3. Kružnici připsanou (ke) straně KL obecného trojúhelníku KLM rozumíme tu kružnici, která se dotýká strany KL v jejím vnitřním bodě a přímek KM, LM v bodech ležících uvnitř poloroviny opačné k polorovině KLM . Dokažte, že střed takové kružnice je průsečíkem os vnějších úhlů při vrcholech K, L trojúhelníku KLM a že jím prochází rovněž osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu M .
- D1. Dokažte, že pro pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60^\circ$.

- D2. Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC . Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.
- D3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímkou BI , CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB , AC v bodech K , L . Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec).
- D4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC , přitom D leží mezi B a E , $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F . Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180^\circ$.
5. Zkoumejme trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících podmínku $ab = c^2$.
- a) Pro každé prvočíslo p uveďte příklad trojice (a, b, c) , pro kterou platí rovnost $a + b - 2c = p$.
- b) Dokažte, že pro každou trojici (a, b, c) je $a + b + 2c$ složené číslo.

(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Existuje nějaká trojice (a, b, c) přirozených čísel splňující podmínky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Pokud ano, jak by se dala využít k řešení části a) soutěžní úlohy pro libovolné prvočíslo p ?
- N2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla u, v, w platí $u^2 = v^2w$, je číslo w druhou mocninou přirozeného čísla.
- N3. Dokažte, že pokud součin dvou nesoudělných přirozených čísel u, v je roven druhé mocnině celého čísla, jsou obě čísla u, v také druhými mocninami celých čísel.
- D1. Pro dané prvočíslo p najděte *všechny* trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících obě rovnosti $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$.
- D2. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.
- D3. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q , pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$.
- D4. Určete všechny dvojice prvočísel p a q , pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$.
- D5. Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2 + ab + b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla.

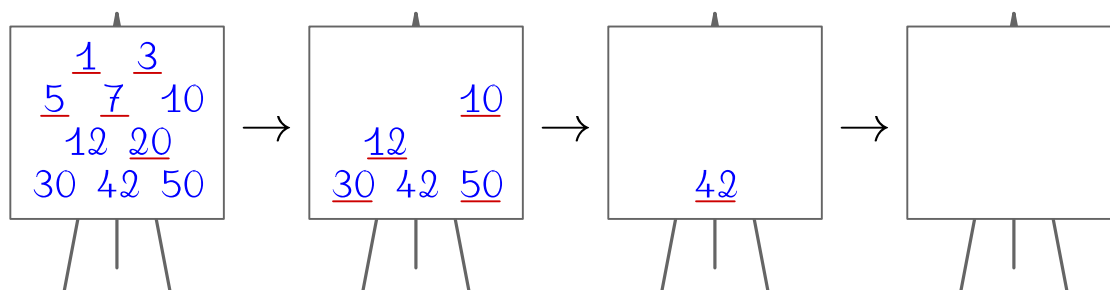
6. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B . Označme I střed kružnice jemu vepsané, M střed přepony AC a X průsečík přímky IM s přímkou BC . Dokažte, že pokud leží body B, I, M, C na jedné kružnici, je trojúhelník ABX rovnoramenný.
(David Hruška)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120^\circ$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC , když $\delta = 140^\circ$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ , aby byl úhel BAC co největší. c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A' . Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$ byl co největší.
- N2. Mějme dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Dokažte, že jeho vrcholy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$.
- N3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A . Vyjádřete velikost úhlu BIC pomocí α .
- N4. V pravouhlém trojúhelníku ABC označíme M střed přepony AC a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A . Vyjádřete pomocí α velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelnících ABM a BCM .
- D1. Je dán pravouhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C . Necht D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB . Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC . Dokažte, že $|AE| = |AF|$.
- D2. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímkou AB a kolmý průmět Q bodu B na přímkou AC . Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD .
- D3. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. (Kružnicí připsanou například straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB a polopřímek opačných k polopřímek AD a BC .)
- D4. Je dána kružnice k a její průměr AB . Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné
- D5. Označme I střed kružnice vepsané pravouhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A . Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI . Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN .

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. Na tabuli napíšeme deset navzájem různých přirozených čísel. V každém kroku nejdříve podtrhneme každé číslo, které není součtem žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli, poté všechna podtržená čísla smažeme. Například:



- a) Dokažte, že pro libovolných deset napsaných čísel zůstane po konečném počtu kroků tabule prázdná.
 b) Určete největší počet kroků, po jejichž provedení ještě nemusí zůstat tabule prázdná. Uveďte příklad deseti čísel, pro něž tohoto počtu dosáhneme.

(Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Budeme se zabývat pouze námětem ze soutěžní úlohy.

- N1. Po kolika krocích bude tabule prázdná, pokud je na ní na začátku napsána pětice nejmenších přirozených čísel? [Po dvou krocích. V prvním kroku smažeme čísla 1 a 2, v druhém kroku zbylá čísla 3, 4, 5.]
- N2. Kolik nejméně přirozených čísel může být na tabuli napsáno, pokud chceme, aby tabule zůstala prázdná až po dvou krocích? [Budou-li na tabuli nejvýše dvě čísla, bude tabule zřejmě prázdná hned po prvním kroku. Tři napsaná čísla někdy ke dvěma krokům vedou – obecně je to trojice (a, b, c) , kde $c = a + b$. Podrobněji: Chceme-li, aby tabule po prvním kroku ještě nebyla prázdná, musí být některé z napsaných čísel c součtem některých dalších čísel a a b splňujících $a \neq b$. Protože v rovnosti $c = a + b$ jsou všechna čísla kladná, máme kromě $a \neq b$ také $c > a$ a $c > b$. Na tabuli tedy musí být napsána alespoň tři čísla, jako např. $(1, 2, 3)$.]
- N3. Vyřešte variantu soutěžní úlohy, ve které budeme podtrhávat a následně mazat právě ta čísla, která nejsou *součinem* žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli. [Je-li na tabuli číslo 1, bude v prvním kroku smazáno jako jediné. Jinak v každém kroku budou mezi smazanými dvě nejmenší čísla – výjimkou může být jen poslední krok, bude-li při něm na tabuli jediné číslo. Z uvedených poznatků už plyne, že tabule bude prázdná po nejvýše 6 krocích. Po 5 krocích ještě prázdná být nemusí, jak ukazuje příklad výchozích čísel 1, 2, 3, 6, 18, ..., kde každé číslo počínaje čtvrtým je rovno součinu dvou čísel předchozích. Hledaný největší počet kroků je tedy roven 5.]
- D1. Na začátku můžeme na tabuli napsat libovolnou sedmici různých přirozených čísel obsahující čísla 1 a 2. Najděte všechny takové sedmice, pro které po třech krocích tabule ještě nebude prázdná. [Takové sedmice jsou čtyři: $(1, 2, 3, 4, 7, 10, 17)$, $(1, 2, 3, 4, 7, 11, 18)$, $(1, 2, 3, 5, 8, 11, 19)$ a $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$. V každém kroku

musíme smazat pouze dvě nejmenší čísla. Uspořádejme čísla vzestupně. Třetí číslo tak musí být $1 + 2 = 3$, čtvrté $1 + 3 = 4$ nebo $2 + 3 = 5$. Podobně po číslech 3, 4 musí následovat čísla 7, 10 nebo 7, 11 a po číslech 3, 5 čísla 8, 11 nebo 8, 13. Poslední sedmé číslo musí být součtem pátého a šestého čísla.]

- D2. Jak by se změnily závěry soutěžní úlohy, pokud by na začátku bylo napsáno na tabuli jakýchkoli deset navzájem různých *celých* čísel? [Už tvrzení z části a) by přestalo platit – uvažte například desetici $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, ve které žádné číslo nepodtrhneme, a tedy ani nesmažeme.]
- D3. Mějme nějakou výchozí deseticí různých přirozených čísel, pro kterou po čtyřech krocích tabule ještě nebude prázdná. Může se největší číslo z takové deseticе rovnat číslu 35? [Může:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \rightarrow (\underline{3}, \underline{4}, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \rightarrow \\ \rightarrow (\underline{7}, \underline{10}, \underline{11}, 17, 18, 35) \rightarrow (\underline{17}, \underline{18}, 35) \rightarrow (\underline{35}).]$$

2. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. (Jaromír Šimša)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Tabulka 3×3 je vyplněna různými celými čísly tak, že součty tří čísel v každém řádku i sloupci jsou lichá čísla. Mohou být v tabulce a) čísla od 1 do 9, b) čísla od 2 do 10? [a) ano, b) ne. V případě a) například můžeme lichými čísly, kterých je 5, zaplnit první řádek a první sloupec. Protože $2 + 3 + \dots + 10 = 54$ je sudé číslo, musí být v případě b) sudý součet čísel v aspoň jednom řádku (i v aspoň jednom sloupci).]
- N2. Necht $k > 1$ je celé číslo. Mějme danu tabulku o k polích, kterou máme vyplnit k danými a navzájem různými čísly (tak, aby každé z nich bylo použito). Dokažte, že počet všech takových vyplnění je roven součinu $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$. Tento součin nazýváme faktoriálem čísla k a značíme symbolem $k!$, který čteme „ k faktoriál“. Kládeme také $1! = 1$ a $0! = 1$. [Označme pole čísly od 1 do k a vybírejme pro ně čísla postupně takto: nejdříve pro pole 1, pak pro pole 2 atd., až nakonec pro pole k . Počty možností těchto výběrů budou postupně $k, k-1$ atd., až 1. Celkový počet vyplnění dostaneme, když uvedené počty možností mezi sebou vynásobíme.]
- N3. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 2×2 a čísla od 1 do 4. [1 : 3. Mezi čísly od 1 do 4 jsou dvě lichá a dvě sudá, takže všechny řádkové a sloupcové součty budou liché, když lichá čísla 1 a 3 nebudou ležet ani ve stejném řádku ani sloupci, tj. budou na jedné z obou diagonál. Vybrat diagonálu pro čísla 1, 3 můžeme dvěma způsoby, umístit na ni čísla 1, 3 dvěma způsoby a na druhou diagonálu čísla 2, 4 též dvěma způsoby. Celkem tak existuje právě $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ vyplnění, která vyhovují zadání. Jelikož podle N2 je počet všech vyplnění roven $4! = 24$, hledaný poměr je roven $8 : 24$ neboli $1 : 3$.]

- D1. Mějme celá čísla $0 \leq k \leq n$. Kolika způsoby lze z n kuliček různých barev vybrat některých k ? [Vybírejme těchto k kuliček jednu po druhé. V prvním kroku máme n možností, v druhém $n - 1$ možností atd., až v k -tém kroku máme $n - k + 1$ možností. Uvědomme si, že pokud vybereme tytéž kuličky v jiném pořadí, dostaneme stejný výsledný výběr. Možných pořadí k kuliček je podle N2 právě $k!$. Hledaný počet k -tic je proto roven $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Výsledek se nazývá *kombinační číslo* a značí se symbolem $\binom{n}{k}$, který čteme „ n nad k “.]
- D2. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 4 krát 4 a celá čísla od 1 do 16. [$L : M = 8 : 715$. Pro počet M všech vyplnění platí $M = 16!$. Ukažme dále, že pro počet L těch vyplnění, kde jsou součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla, platí $L = 144 \cdot 8! \cdot 8!$. Odtud už po rutinním zkrácení zlomku $(144 \cdot 8! \cdot 8!)/16!$ vyplyne uvedený výsledek.

Mezi čísly od 1 do 16 je právě osm lichých čísel. V každém řádku musí být buď jedno, nebo tři lichá čísla. Celkem jich je 8, proto snadno zjistíme, že ve dvou řádcích r_1, r_2 musí být tři lichá čísla a ve zbylých dvou řádcích r_3, r_4 jedno liché číslo. Stejný závěr platí také pro sloupce – ve dvou sloupcích s_1, s_2 musí být tři lichá čísla a ve zbylých dvou sloupcích s_3, s_4 jedno liché číslo.

Ukažme, že ve čtveřici políček daných průnikem řádků r_1, r_2 se sloupce s_1, s_2 jsou jen lichá čísla. Označme jejich počet x . Protože v řádcích r_1 a r_2 je dohromady 6 lichých čísel, což platí i pro sloupce s_1 a s_2 , máme $2 \cdot 6 - x \leq 8$, odkud $x \geq 4$, tj. skutečně $x = 4$. Zmíněná čtveřice políček tak obsahuje čtyři lichá čísla. Zbylá dvě lichá čísla z řádků r_1 a r_2 se pak nacházejí po jednom ve sloupcích s_3 a s_4 , pro výběr jejich pozic tak máme 2 možnosti. Totéž platí pro zbylá dvě lichá čísla ze sloupců s_1 a s_2 : pro výběr jejich pozic v řádcích r_3 a r_4 máme rovněž 2 možnosti. Tím máme popsány možné vyhovující pozice všech osmi lichých čísel.

Celkový počet vyhovujících výběrů pozic lichých a sudých čísel proto spočteme takto: nejdříve zvolíme libovolně dvojici řádků s_1, s_2 (6 možností) a dvojici sloupců r_1, r_2 (6 možností), potom provedeme výběry pro pozice lichých čísel ve dvojicích sloupců s_3, s_4 a r_3, r_4 (pro každý z obou výběrů máme jak víme 2 možnosti). Počet vyhovujících výběrů pozic pro lichá a sudá čísla je tedy $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$. Odtud už plyne výše uvedená hodnota $L = 144 \cdot 8! \cdot 8!$, neboť 8 pozic pro lichá čísla stejně jako 8 pozic pro sudá čísla můžeme vyplnit $8!$ způsoby.]

- D3. Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \dots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje? [50-B-I-3]

- D4. Je dáno celé číslo $n \geq 2$. Kolika způsoby lze vybarvit políčka tabulky $n \times n$ čtyřmi barvami tak, aby v každém čtverečku 2×2 byla každá barva použita právě jednou? [$2^3 \cdot 3^{2n-3}$ způsoby. Vybarvěme nejprve první řádek a první sloupec tak, aby v žádném čtverci 2×2 nebyla žádná barva použita vícekrát. Začneme políčkem v levém horním rohu – pro jeho vybarvení máme 4 možnosti. Pak postupně vybarvujeme první sloupec shora dolů – v každém kroku máme na výběr ze tří barev. Nakonec vybarvíme první řádek zleva doprava – v prvním kroku máme pouze 2 možnosti obarvení, ve zbylých krocích máme 3 možnosti. Celkový počet vyhovujících obarvení prvního řádku a prvního sloupce je proto roven $4 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^{n-2}$, tj. $2^3 \cdot 3^{2n-3}$. To je výsledek úlohy, neboť každé takové obarvení lze rozšířit na vyhovující obarvení celé tabulky právě jedním způsobem. Skutečně, jakmile známe barvy tří políček některého čtverečku 2×2 , barva čtvrtého políčka je jednoznačně určena; takové dobarvování můžeme provést například tak, že zleva doprava dobarvíme $n - 1$ čtverečků nejprve ve druhém řádku, pak ve třetím řádku atd. až nakonec v n -tém řádku. Využijeme přitom všech $(n - 1)^2$ čtverečků 2×2 v dané šachovnici, takže získané obarvení je vyhovující.]
3. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají kvadratické trojčleny $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$ následující vlastnost: každá z rovnic

$$aP(x) + bQ(x) = 0 \quad \text{a} \quad aQ(x) + bP(x) = 0$$

je kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem.

(Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Rozhodněte, pro které reálné hodnoty parametru p je

$$(p + 2)x^2 + 2(p + 1)x + (p - 1) = 0$$

kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. [Jediná hodnota $p = -3$. Pokud $p = -2$, nejedná se o kvadratickou rovnici. Je-li $p \neq -2$, má tato kvadratická rovnice dvojnásobný kořen, právě když je její diskriminant nulový. Ten je přitom roven $(2(p + 1))^2 - 4(p + 2)(p - 1)$, po úpravě $4(p + 3)$, což je rovno nule pouze pro $p = -3$.]

- N2. Necht reálná čísla r, s, t splňují soustavu dvou rovnic $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Dokažte, že $r = 2s$. Rozmyslete si, jak tento výsledek využít k řešení soutěžní úlohy, když za r, s, t zvolíte vhodné výrazy. [Vynásobíme-li první rovnici r , dostáváme $r^3 = 8rst$. Na pravé straně pak můžeme nahradit rt za s^2 díky druhé rovnici. Obdržíme $r^3 = 8s^3$ neboli $r^3 = (2s)^3$, což skutečně dává $r = 2s$, neboť funkce $y = x^3$ je jak známo rostoucí, a tedy prostá. Užití k řešení soutěžní úlohy zde prozrazovat nebudeme.]
- D1. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen. [53–B–II–2]
- D2. V oboru reálných čísel r, s, t řešte soustavu dvou rovnic z úlohy N2. [Řešeními jsou právě trojice $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$ a $(r, s, t) = (0, 0, t)$, kde t je v obou případech

libovolné reálné číslo. Podle N2 platí nutně $r = 2s$; po dosazení takového r získají rovnice tvar $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$. Vidíme, že v případě $s = 0$ je $r = 2s = 0$ a t je libovolné; v případě $s \neq 0$ se obě rovnice $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$ zjednoduší na $s = 2t$, takže $r = 2s = 4t$, a tudíž $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$, kde t je libovolné.]

- D3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

a) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.

b) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen. [69–B–II–1]

- D4. a) Dokažte nerovnost $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b .

b) Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 + ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b . [70–B–II–1]

- D5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1 \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

[69–A–II–1]

4. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokažte, že $|CD| = |DE|$. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Rozmyslete si a zdůvodněte, že pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy lze získat z jistého rovnoběžníku „odstříhnutím“ jednoho jeho „rohu“. [Zadaný konvexní pětiúhelník leží jak v pásu mezi rovnoběžkami BC a DE , tak v pásu mezi rovnoběžkami CD a AE . Proto leží i v průniku těchto dvou pásů, kterým je rovnoběžník $PCDE$, kde P je průsečík (různoběžných) přímk BC a AE . Protože zbylé vrcholy A, B jsou vnitřní body stran PE , resp. PC , od rovnoběžníku $PCDE$ oddělíme trojúhelník APB .]

- N2. Připomeňme, že osou libovolného (konvexního i nekonvexního) úhlu s vrcholem V nazýváme tu polopřímku s počátečním bodem P , která daný úhel rozděljuje na dva shodné úhly (tj. úhly téže velikosti). Připomeňte si rovněž a dokažte „větu o ose úhlu“: *Osa úhlu AVB , který má velikost menší než 180° , je tvořena právě těmi jeho body, které mají od obou přímk VA, VB stejnou vzdálenost.* [Označme $\alpha = |\sphericalangle AVB|$. Stačí uvažovat jen vnitřní body úhlu AVB , necht X je libovolný z nich. Při označení $\alpha_1 = |\sphericalangle AVX|$ a $\alpha_2 = |\sphericalangle XVB|$ platí $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha < 180^\circ$ a bod X má od přímk VA, VB vzdálenosti $|VX| \sin \alpha_1$, resp. $|VX| \sin \alpha_2$. Ty se proto rovnají, právě když platí $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, což pro konvexní úhly nastane jen ve dvou případech: $\alpha_1 = \alpha_2$ nebo $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$. Druhý z nich je však

výše vyloučen; první případ znamená právě to, že X je vnitřním bodem osy úhlu AVB .]

- N3. Kružnici připisované (ke) straně KL obecného trojúhelníku KLM rozumíme tu kružnici, která se dotýká strany KL v jejím vnitřním bodě a přímkou KM , LM v bodech ležících uvnitř poloroviny opačné k polorovině KLM . Dokažte, že střed takové kružnice je průsečíkem os vnějších úhlů při vrcholech K , L trojúhelníku KLM a že jí prochází rovněž osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu M . [Průsečík S zmíněných dvou os vnějších úhlů je vnitřním bodem úhlu KML ležícím v polorovině opačné k polorovině KLM a má podle N2 stejnou vzdálenost v od všech tří přímkou KM , KL a LM , tedy (opět díky N2) leží i na ose úhlu KML . Kružnice se středem S a poloměrem v je pak zřejmě připisána straně KL trojúhelníku KLM .]
- D1. Dokažte, že pro pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60^\circ$. [Nechť P je průsečík přímkou BC a AE . Pak $PCDE$ je rovnoběžník s body A , B uvnitř stran PE , resp. PC . Označme $\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$, $\beta = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ a $\delta = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EPC|$. Ze součtu vnitřních úhlů $\triangle APB$, který má vyjádření $(180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) + \delta = 180^\circ$, plyne rovnost $\alpha + \beta = 90^\circ + \frac{1}{2}\delta$. Porovnáme-li v $\triangle ADE$ vnitřní úhel u vrcholu A s vnějším úhlem při vrcholu E , dostaneme $\alpha < \delta$. Stejně tak z $\triangle BCD$ obdržíme $\beta < \delta$. Sečtením dvou odvozených nerovností vychází $\alpha + \beta < 2\delta$, takže z rovnosti $\alpha + \beta = 90^\circ + \frac{1}{2}\delta$ plyne $90^\circ + \frac{1}{2}\delta < 2\delta$, odkud $\delta > 60^\circ$, jak jsme měli dokázat.]
- D2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC . Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [71–B–I–2]
- D3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímkou BI , CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB , AC v bodech K , L . Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec). [71–A–S–2]
- D4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC , přitom D leží mezi B a E , $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F . Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180^\circ$. [70–A–II–3]

5. Zkoumejme trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících podmínku $ab = c^2$.

- a) Pro každé prvočíslo p uveďte příklad trojice (a, b, c) , pro kterou platí rovnost $a + b - 2c = p$.
- b) Dokažte, že pro každou trojici (a, b, c) je $a + b + 2c$ složené číslo.

(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Existuje nějaká trojice (a, b, c) přirozených čísel splňující podmínky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Pokud ano, jak by se dala využít k řešení části a) soutěžní úlohy pro libovolné prvočíslo p ? [Ano, ale prozrazovat ji nebudeme, natož způsob, jak by

- se dala využít. Zkuste vypsát všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel splňujících rovnici $ab = c^2$ pro malé hodnoty c . Vyhovuje některá z nich i druhé podmínce?]
- N2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla u, v, w platí $u^2 = v^2w$, je číslo w druhou mocninou přirozeného čísla. [Uvažme libovolné prvočíslo p dělicí číslo w . Z rovnosti $u^2 = v^2w$ plyne, že p je také dělitel čísla u , takže číslo u^2 má ve svém rozkladu na prvočinitele sudý počet výskytů p , který ovšem musí být větší než případný sudý počet výskytů p v rozkladu čísla v^2 . Odtud už plyne, že p má také sudý počet výskytů v rozkladu čísla w , které tudíž je druhou mocninou přirozeného čísla (platí to i v případě $w = 1$).]
- N3. Dokažte, že pokud součin dvou nesoudělných přirozených čísel u, v je roven druhé mocnině celého čísla, jsou obě čísla u, v také druhými mocninami celých čísel. [Uvažme rozklady čísel u, v a uv na prvočinitele. V rozkladu druhé mocniny rovné číslu uv má každé prvočíslo sudý počet výskytů. Čísla u, v však nemají žádného společného prvočinitele, proto také v jejich rozkladech má každé prvočíslo sudý počet výskytů (v jednom z rozkladů u, v je to nula, ve druhém stejný počet jako v rozkladu uv).]
- D1. Pro dané prvočíslo p najděte *všechny* trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících obě rovnosti $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$. [$\{a, b\} = \{(n+1)p, np\}$ a $c = n(n+1)p$, kde n je libovolné přirozené číslo. Označme d největší společný dělitel čísel a, b . Protože součin ab má být druhou mocninou celého čísla, podle N2 a N3 platí $a = u^2d, b = v^2d$ pro vhodná přirozená u, v , takže $c = uv d$. Dosazením do $a + b - 2c = p$ po snadné úpravě dostáváme $d(u - v)^2 = p$. Protože p je prvočíslo, musí být nutně $(u - v) = \pm 1$ a $d = p$. V případě $u - v = 1$ máme $a = (v + 1)^2p, b = v^2p$ a $c = v(v + 1)p$; v případě $u - v = -1$ podobně $a = u^2p, b = (u + 1)^2p$ a $c = u(u + 1)p$.]
- D2. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji. [71-B-I-1]
- D3. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q , pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55-C-II-4]
- D4. Určete všechny dvojice prvočísel p a q , pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$. [55-B-II-1]
- D5. Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2 + ab + b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla. [69-A-III-4]
6. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B . Označme I střed kružnice jemu vepsané, M střed přepony AC a X průsečík přímky IM s přímkou BC . Dokažte, že pokud leží body B, I, M, C na jedné kružnici, je trojúhelník ABX rovnoramenný. (David Hruška)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120^\circ$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC , když $\delta = 140^\circ$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ , aby byl úhel BAC co největší. c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A' . Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$

byl co největší. [V rovnoramenných trojúhelnících BOC , COA a AOB spočtete úhly, nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ . V části a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, stejně jako v části b), a to nezávisle na volbě δ .* V části c) vyjde součet 180° nezávisle na poloze bodu A nebo A' .**]

- N2. Mějme dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Dokažte, že jeho vrcholy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$. [Úvodem konstatujme, že díky konvexnosti $PQRS$ leží vrcholy R, S posuzovaných úhlů PRQ, PSQ uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou PQ . Předpokládejme nejprve, že čtyřúhelník $PQRS$ má všechny čtyři vrcholy na jedné kružnici. Rovnost $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$ je pak rovností dvou obvodových úhlů této kružnice, které přísluší témuž oblouku PQ .

Předpokládejme naopak, že úhly PRQ a PSQ jsou shodné a označme φ jejich velikost. Dokážeme, že kružnice opsané trojúhelníkům PRQ a PSQ mají stejný střed, tím pádem i stejný poloměr. V případě $\varphi = 90^\circ$ je to důsledek Thaletovy věty. Posudme nyní případ $\varphi < 90^\circ$. Střed kružnic opsaných trojúhelníkům PRQ a PSQ pak leží uvnitř poloroviny $PQR = PQS$ a každý z nich tvoří s body P a Q rovnoramenný trojúhelník ze základnou PQ , který má podle věty o obvodovém a středovém úhlu u hlavního vrcholu úhel 2φ . Proto tyto dva středy splývají. V případě $\varphi > 90^\circ$ pak středy obou opsaných kružnic leží v polorovině opačné k polorovině $PQR = PQS$ a odpovídající rovnoramenné trojúhelníky tehdy mají u hlavního vrcholu úhel $360^\circ - 2\varphi$.***]

- N3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A . Vyjádřete velikost úhlu BIC pomocí α . [$90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Označme po řadě β, γ velikosti vnitřních úhlů u vrcholů B a C . Protože bod I leží na osách obou těchto úhlů, ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku BIC dostáváme $|\sphericalangle BIC| = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.]
- N4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme M střed přepony AC a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A . Vyjádřete pomocí α velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelnících ABM a BCM . [Trojice $(\alpha, \alpha, 180^\circ - 2\alpha)$ a $(90^\circ - \alpha, 90^\circ - \alpha, 2\alpha)$. Využijte toho, že díky Thaletově větě jsou oba trojúhelníky ABM a BCM rovnoramenné s hlavním vrcholem M .]
- D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C . Necht D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB . Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC . Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]
- D2. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC . Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD . [68–B–I–5]
- D3. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. (Kružnicí připsanou například

* Oba fakty jsou důsledkem známé věty o obvodových a středových úhlech v libovolné kružnici.

** Výsledek části c) má známé zobecnění: Konvexní čtyřúhelník je tětiový (tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici), právě když součet velikostí jeho protějších vnitřních úhlů je 180° .

*** Dokázané tvrzení je okamžitým důsledkem tzv. věty o ekvigonále úsečky: Množina všech bodů, ze kterých je daná úsečka PQ vidět pod daným úhlem α , kde $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, je tvořena vnitřními body dvou kružnicových oblouků s krajními body P a Q , které jsou souměrně sdružené podle přímky PQ .

straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AD a BC .) [69-B-S-2]

- D4. Je dána kružnice k a její průměr AB . Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné [68-B-S-3]
- D5. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A . Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI . Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN . [70-A-III-2]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. Uvažujme 2022 zlomků

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2021}{1}$$

ve tvaru podílu dvou celých nezáporných čísel, jejichž součet je pro každý zlomek roven 2022. Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty? (Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Rozdíl dvou přirozených čísel je roven 4, přičemž jedno z čísel je násobkem druhého. O jaká čísla se jedná?
- N2. Číslo 73 rozložte na součet dvou přirozených čísel tak, aby jejich podíl byl také přirozené číslo.
- N3. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n nabývá zlomek

$$\frac{4n + 1}{2n - 3}$$

celočíselné hodnoty.

- D1. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n nabývá zlomek

$$\frac{n + 72}{2n}$$

celočíselné hodnoty.

- D2. Každý zlomek ze zadání soutěžní úlohy, který *nenabývá* celočíselné hodnoty, zkrátíme na zlomek v základním tvaru. Určete všechny ty původní zlomky, které po zkrácení budou mít jmenovatel rovný 2.

2. Šebestová má z pětiminutovek průměr známek přesně 1,12. Dokažte, že z nich má aspoň 22 jedniček. (Možné známky jsou 1, 2, 3, 4, 5.) (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pažout dostal z desetiminutovek osmkrát známku 5, šestkrát známku 4, čtyřikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Kolik by k tomu ještě musel dostat jedniček, aby se průměr jeho známek zlepšil přesně o 1 stupeň?
- N2. Horáček dostal z desetiminutovek nejprve třikrát známku 2, další jeho známky už byly pouze pětky. Kolik jich dostal, byl-li průměr jeho známek horší než 4,2?
- N3. Čermáková měla z desetiminutovek, kterých bylo méně než 15, průměr známek přesně 1,75. O kolik známek mohlo jít?
- N4. Mach tvrdí, že kdyby z další desetiminutovky dostal známku 1, vylepšil by si tak průměr z přesně 1,15 na přesně 1,12. Je to možné?
- D1. Kropáček měl z několika desetiminutovek průměr známek přibližně 3,14 (zaokrouhleno na setiny). Mohlo jít o osm známek?
3. V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB , N střed strany AC a P střed úsečky MN . Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$. (Patrik Bak, Eliška Macáková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Užitím podobných trojúhelníků odvoďte známou vlastnost středních příček obecného trojúhelníku ABC : Je-li M střed strany AB a N střed strany AC , pak $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.
- N2. Jsou dány rovnoběžky p, q a bod S , který na nich neleží. Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C . Průsečíky přímky q s přímkami SA, SB, SC jsou označeny po řadě D, E, F . Dokažte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

- N3. Připomeňte si Thaletovu větu a užití ji k důkazu tvrzení: Osa pravého úhlu v různostranném pravoúhlém trojúhelníku půlí úhel mezi jeho výškou k přeponě a těžnicí k přeponě.
- D1. Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ , body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC . Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$.
- D2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k .
- D3. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označíme P průsečík vnitřních úhlů u vrcholů A, D a Q průsečík vnitřních úhlů u vrcholů B, C . Dokažte, že body P a Q leží na téže rovnoběžce se základnami lichoběžníku.

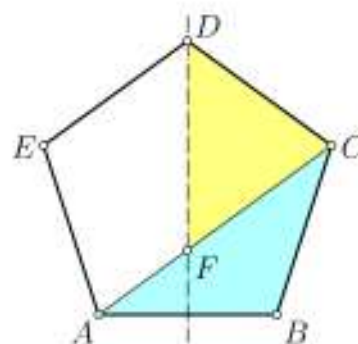
4. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \dots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$? (Radek Horenský)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Šebestová roztrhla list papíru na tři kousky, poté některé z těchto kousků opět roztrhla každý na tři kousky, atd. Rozhodněte, které počty kousků $4, 5, 6, \dots, 20$ mohla tímto postupem získat.
- N2. Na tabuli je napsáno a) 5 písmen R a 5 písmen S, b) 25 písmen R a 30 písmen S. V každém kroku smažeme dvě napsaná písmena a nahradíme je písmenem R, resp. S, byla-li smazaná písmena různá, resp. stejná. Které písmeno zůstane na tabuli poslední?
- N3. Na tabuli jsou napsány 3 jedničky, 3 dvojky a 3 trojky. V každém kroku je povoleno smazat libovolné dvě různé číslice a připsat místo nich zbývající třetí číslici. Po sérii takových úprav se nám podařilo dojít k situaci, kdy na tabuli zůstala jediná číslice, a to dvojka. Mohlo se stát, že při jiném průběhu úprav bychom došli k jiné jediné číslici, tj. k jedničce nebo trojce? Změní se odpověď při jiných výchozích počtech číslic?
- D1. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla od 1 do 100. V každém kroku smažeme trojici po sobě jdoucích čísel (existuje-li taková trojice). Mohou na tabuli zůstat nakonec čísla, jejichž celkový součet bude 111?
- D2. Vraťme se k situaci z úlohy N3 s obecnými výchozími počty číslic. Rozhodněte, zda je možné, abychom dvěma odlišnými postupy úprav došli jednou k jediné číslici 1 a podruhé k jediné číslici 3.

5. Necht $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky AC s osou strany AB označme F . Dokažte, že trojúhelníky ABC a CDF mají stejný obsah.

(David Hruška)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Připomeňme, že pravidelný pětiúhelník je konvexní pětiúhelník, které má shodné všechny strany i všechny vnitřní úhly.

- N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ narýsujeme osy všech jeho stran a osy všech jeho úhlopříček. Kolik různých přímek to bude? Vysvětlete, proč každá z nich je osou souměrnosti celého pětiúhelníku a prochází jedním jeho vrcholem.
- N2. Dokažte, že každé čtyři vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku.

- N3. Rovnoběžné úsečky KL a MN neleží na jedné přímce. Dokažte, že trojúhelníky KLM a KLN mají stejný obsah.
- D1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme G průsečík úhlopříček AC a BD . Dokažte, že čtyřúhelník $AGDE$ je kosočtverec.
- D2. Dokažte, že dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které vycházejí z jednoho jeho vrcholu, rozdělují příslušný vnitřní úhel na třetiny.
- D3. Označme a délku strany a u délku úhlopříčky daného pravidelného pětiúhelníku. Dokažte rovnost $a^2 + au = u^2$.
6. Určete největší přirozené číslo $n \geq 10$ takové, že pro libovolných 10 různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí následující tvrzení: *Není-li ani jedno z těchto 10 čísel prvočíslem, pak je součet některých dvou z nich prvočíslem.* (Ján Mazák)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Ukažte, že z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ lze vybrat 4 různá čísla tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. Najděte rovněž všechny takové výběry.
- N2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ lze z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ vybrat $n - 1$ čísel tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem.
- D1. Ukažte, že počet všech šestimístných prvočísel nepřevyšuje 300 000.
- D2. Najděte největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo.
- D3. Kolik nejvýše čísel lze vybrat z množiny $\{1, 2, \dots, 2018\}$ tak, aby rozdíl žádných dvou vybraných čísel nebyl roven prvočíslu?

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. Uvažujme 2022 zlomků

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2021}{1}$$

ve tvaru podílu dvou celých nezáporných čísel, jejichž součet je pro každý zlomek roven 2022. Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty? (Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Rozdíl dvou přirozených čísel je roven 4, přičemž jedno z čísel je násobkem druhého. O jaká čísla se jedná? $[(5, 1), (6, 2), (8, 4)]$. Necht $a > b$ jsou hledaná čísla. Pak menší číslo b je dělitelem většího čísla a , a tedy i dělitelem čísla $a - b$, které se podle zadání rovná 4. Proto $b \in \{1, 2, 4\}$. Tento poznatek plyne i z vyjádření podílu obou čísel ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{b+4}{b} = 1 + \frac{4}{b}.$$

N2. Číslo 73 rozložte na součet dvou přirozených čísel tak, aby jejich podíl byl také přirozené číslo. [Jediné řešení $72 + 1$. Postupujte podobně jako v řešení N1: využijte kupříkladu vyjádření

$$\frac{a}{b} = \frac{73-b}{b} = \frac{73}{b} - 1$$

a poznatku, že 73 je prvočíslo.]

N3. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n nabývá zlomek

$$\frac{4n+1}{2n-3}$$

celočíselné hodnoty. [$n \in \{1, 2, 5\}$. Z úpravy

$$\frac{4n+1}{2n-3} = \frac{2(2n-3)+7}{2n-3} = 2 + \frac{7}{2n-3}$$

vidíme, že hledáme právě ta n , pro která je celé (třeba i záporné) číslo $2n - 3$ dělitelem čísla 7, tj. jedním z čísel $\pm 1, \pm 7$. Některé z rovnic $2n - 3 = \pm 1$, $2n - 3 = \pm 7$ vyhovují právě hodnoty $n \in \{-2, 1, 2, 5\}$, z nichž záporné $n = -2$ musíme kvůli zadání vyloučit.]

D1. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n nabývá zlomek

$$\frac{n+72}{2n}$$

celočíselné hodnoty. [$n \in \{8, 24, 72\}$. Daný zlomek má celočíselnou hodnotu k , právě když platí $n + 72 = 2nk$ neboli $72 = n(2k - 1)$. Odtud vidíme, že celé číslo $2k - 1$ je kladné a že je to lichý dělitel čísla 72. Proto $2k - 1 \in \{1, 3, 9\}$ a rovnost $72 = n(2k - 1)$ je pak splněna pro tři výše uvedená n .]

D2. Každý zlomek ze zadání soutěžní úlohy, který *nenabývá* celočíselné hodnoty, zkrátíme na zlomek v základním tvaru. Určete všechny ty původní zlomky, které po zkrácení budou mít jmenovatel rovný 2. $[\frac{2018}{4}, \frac{2010}{12}$ a $\frac{674}{1348}$. Budou to právě zlomky s jmenovatelem $2k$ pro vhodné k od 1 do 1011, jejichž číselník $2022 - 2k$ je dělitelný číslem k , ne však číslem $2k$. Ekvivalentně vyjádřeno: Číslo 2022 je dělitelné číslem k , ne však číslem $2k$. Hledáme tedy ta k od 1 do 1011, která dělí číslo 2022, nedělí však číslo 1011. Jsou to zřejmě pouze *sudá* čísla 2, 6 a 674, kterým odpovídají tři úvodem vypsane zlomky.]

2. Šebestová má z pětiminutovek průměr známek přesně 1,12. Dokažte, že z nich má aspoň 22 jedniček. (Možné známky jsou 1, 2, 3, 4, 5.) (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pažout dostal z desetiminutovek osmkrát známku 5, šestkrát známku 4, čtyřikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Kolik by k tomu ještě musel dostat jedniček, aby se průměr jeho známek zlepšil přesně o 1 stupeň? [10. Potřebný počet jedniček označme n . Protože původní průměr má hodnotu

$$\frac{8 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{8 + 6 + 4 + 2} = \frac{80}{20} = 4,$$

po přidání n jedniček má být roven 3, tj. má platit

$$\frac{8 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + n \cdot 1}{8 + 6 + 4 + 2 + n} = \frac{80 + n}{20 + n} = 3.$$

Řešením rovnice $80 + n = 3(20 + n)$ dostaneme $n = 10$.]

- N2. Horáček dostal z desetiminutovek nejprve třikrát známku 2, další jeho známky už byly pouze pětky. Kolik jich dostal, byl-li průměr jeho známek horší než 4,2? [Aspoň 9. Počet pětěk označme n . Má platit

$$\frac{3 \cdot 2 + n \cdot 5}{3 + n} = \frac{5n + 6}{n + 3} > 4,2 = \frac{21}{5}.$$

Úpravou nerovnice $(5n + 6) \cdot 5 > 21 \cdot (n + 3)$ dostaneme $4n > 33$, takže $n \geq 9$.]

- N3. Čermáková měla z desetiminutovek, kterých bylo méně než 15, průměr známek přesně 1,75. O kolik známek mohlo jít? [4, 8 nebo 12. Označme p počet známek a s jejich součet. Platí

$$\frac{s}{p} = 1,75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}.$$

Protože poslední zlomek je v základním tvaru, musí být $s = 7k$ a $p = 4k$ pro vhodné přirozené číslo k . Podle zadání připadají v úvahu pouze hodnoty k rovné 1, 2 a 3.]

- N4. Mach tvrdí, že kdyby z další desetiminutovky dostal známku 1, vylepšil by si tak průměr z přesně 1,15 na přesně 1,12. Je to možné? [Není. Při průměru $1,15 = \frac{23}{20}$ by byl počet známek p násobkem čísla 20, při novém průměru $1,12 = \frac{28}{25}$ by byl počet známek $p + 1$ násobkem čísla 25. Obě čísla p a $p + 1$ však nemohou být současně násobky pěti. Jiný postup: Při počtu známek p s průměrem 1,15 by byl jejich součet $1,15p$, po obdržení nové jedničky by pak mělo platit

$$\frac{1,15p + 1}{p + 1} = 1,12.$$

Tato rovnice má sice řešení $p = 4$, odpovídá mu však původní součet známek $1,15p = 4,6$, což není celé číslo.]

- D1. Kropáček měl z několika desetiminutovek průměr známek přibližně 3,14 (zokrouhleno na setiny). Mohlo jít o osm známek? [Ne. Označme p počet známek a s jejich součet. Hodnota podílu s/p leží v intervalu $(3,135; 3,145)$, takže celé číslo s leží v intervalu $(3,135p; 3,145p)$. Pro $p = 8$ však jde o interval $(25,08; 25,16)$.]

3. V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB , N střed strany AC a P střed úsečky MN . Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.

(Patrik Bak, Eliška Macáková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Užitím podobných trojúhelníků odvodte známou vlastnost středních příček obecného trojúhelníku ABC : Je-li M střed strany AB a N střed strany AC , pak $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$. [Jelikož $|AM| : |AB| = |AN| : |AC| = 1 : 2$, jsou trojúhelníky ABC a AMN podobné podle věty *sus*. Ze shodnosti jejich úhlů ABC a AMN pak plyne $MN \parallel BC$ a díky podobnostnímu poměru $1 : 2$ platí rovněž $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.]
- N2. Jsou dány rovnoběžky p, q a bod S , který na nich neleží. Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C . Průsečíky přímky q s přímkami SA, SB, SC jsou označeny po řadě D, E, F . Dokažte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

[Díky shodnosti vrcholových a souhlasných či střídavých úhlů jsou podle věty *uu* navzájem podobné trojúhelníky SAB a SDE , stejně jako trojúhelníky SAC a SDF , jakož i trojúhelníky SBC a SEF . Díky stranám těchto trojúhelníků se společným krajním bodem S mají všechny tři podobnosti stejný koeficient rovný posledním třem zlomkům v dokazované sérii rovností; první tři zlomky vyjadřují tento koeficient pro strany protější k vrcholu S dotýčných trojúhelníků.]

- N3. Připomeňte si Thaletovu větu a užitě ji k důkazu tvrzení: Osa pravého úhlu v různostranném pravoúhlém trojúhelníku pólí úhel mezi jeho výškou k přeponě a těžnicí k přeponě. [Nechť v trojúhelníku ABC platí $\gamma = 90^\circ$ a $\beta < \alpha$, tj. $\beta < 45^\circ$. Označme C_1 střed přepony AB a C_0 patu výšky z vrcholu C . Podle Thaletovy věty v trojúhelníku C_1CB platí $|C_1C| = |C_1B|$, tudíž $|\sphericalangle BCC_1| = |\sphericalangle C_1CB| = \beta$. V pravoúhlém trojúhelníku ACC_0 zase máme $|\sphericalangle ACC_0| = 90^\circ - |\sphericalangle C_0CA| = 90^\circ - \alpha = \beta$. Úhly BCC_1 a ACC_0 , které leží v pravém úhlu ACB , tak mají tutéž velikost $\beta < 45^\circ$, a proto se nepřekrývají, a tak osa celého úhlu ACB je současně i osou souměrnosti jeho „zbylé“ části mezi úhly BCC_1 a ACC_0 , tj. osou úhlu C_1CC_0 .]
- D1. Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ , body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC . Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$. [C-55-S-2]
- D2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k . [C-51-S-2]
- D3. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označíme P průsečík vnitřních úhlů u vrcholů A, D a Q průsečík vnitřních úhlů u vrcholů B, C . Dokažte, že body P a Q leží na téže rovnoběžce se základnami lichoběžníku. [Střed M ramene AD leží na ose o pásu mezi rovnoběžkami AB a CD . Protože součet úhlů BAD a ADC je díky $AB \parallel CD$ roven 180° , součet polovičních úhlů PAD a ADP je roven 90° , tudíž PAD je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AD o středu M . Podle

Thaletovy věty je PAM rovnoramenný trojúhelník se základnou PA , tudíž úhel MPA je shodný s úhlem PAM , a tedy i s úhlem PAB . Ze shodnosti (střídavých) úhlů MPA a PAB plyne $MP \parallel AB$, tudíž M leží na ose o . Analogickou úvahou o středu N ramene BC zjistíme, že na ose o leží také bod Q .]

4. *Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \dots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$?* (Radek Horenský)

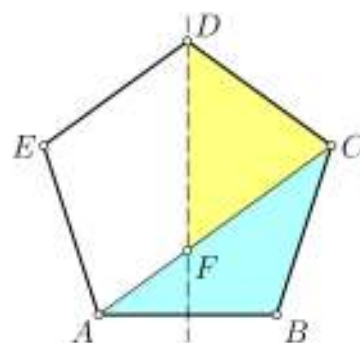
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Šebestová roztrhla list papíru na tři kousky, poté některé z těchto kousků opět roztrhla každý na tři kousky, atd. Rozhodněte, které počty kousků $4, 5, 6, \dots, 20$ mohla tímto postupem získat. [Liché počty $5, 7, \dots, 19$. Celkový počet kousků se každým roztržením jednoho z nich zvětší o 2, takže zůstává lichý jako na počátku.]
- N2. Na tabuli je napsáno a) 5 písmen R a 5 písmen S, b) 25 písmen R a 30 písmen S. V každém kroku smažeme dvě napsaná písmena a nahradíme je písmenem R, resp. S, byla-li smazaná písmena různá, resp. stejná. Které písmeno zůstane na tabuli poslední? [Písmeno R v obou případech a) a b). Počet písmen R se po každém kroku buďto nezmění (smažeme-li dvě S či po jednom R a S), nebo se zmenší o 2 (smažeme-li dvě R), takže zůstane po každém počtu kroků lichý, a proto nikdy neklesne na nulu. Protože se po jednom kroku celkový počet písmen na tabuli sníží o 1, po konečném počtu kroků zůstane na tabuli jako poslední písmeno R.]
- N3. Na tabuli jsou napsány 3 jedničky, 3 dvojky a 3 trojky. V každém kroku je povoleno smazat libovolné dvě různé číslice a připsat místo nich zbývající třetí číslici. Po sérii takových úprav se nám podařilo dojít k situaci, kdy na tabuli zůstala jediná číslice, a to dvojka. Mohlo se stát, že při jiném průběhu úprav bychom došli k jiné jediné číslici, tj. k jedničce nebo trojce? Změní se odpověď při jiných výchozích počtech číslic? [Nemohlo se to stát, ani při jiných výchozích počtech. Zkoumejme aktuální součet S všech číslic na tabuli. Při záměně $(1, 2) \rightarrow 3$ se S nezmění, při záměně $(1, 3) \rightarrow 2$ se S zmenší o 2, konečně při záměně $(2, 3) \rightarrow 1$ se S zmenší o 4. Vidíme, že S nemění svou paritu. Nemůžeme tedy z téhož výchozího stavu někdy dojít k jediné sudé číslici, jindy k jediné liché číslici.]
- D1. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla od 1 do 100. V každém kroku smažeme trojici po sobě jdoucích čísel (existuje-li taková trojice). Mohou na tabuli zůstat nakonec čísla, jejichž celkový součet bude 111? [Ne. Součet tří po sobě jdoucích čísel $(n-1) + n + (n+1) = 3n$ je dělitelný třemi, takže součet čísel na tabuli po každém kroku klesne o násobek tří; jeho zbytek při dělení třemi se tudíž nezmění. Na začátku máme součet $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ se zbytkem 1 při dělení třemi, číslo 111 však má zbytek 0.]

D2. Vraťme se k situaci z úlohy N3 s obecnými výchozími počty číslic. Rozhodněte, zda je možné, abychom dvěma odlišnými postupy úprav došli jednou k jediné číslici 1 a podruhé k jediné číslici 3. [Možné to není. Přeznačme číslice 1, 2, 3 za písmena A, B, C v jakémkoli pořadí – povolené úpravy to nijak neovlivní. Proto negativní odpověď k D2 plyne z výsledku N3. Jinak lze společné řešení N3 a D2 podat takto: označit počet jedniček, dvojek a trojek na tabuli po řadě j , d , t a ukázat, že při úpravách nemění paritu žádný ze tří součtů $j + d$, $j + t$ a $d + t$. Dodejme, že v řešení N3 jsme využili paritu součtu $j + 2d + 3t$, která je stejná jako parita součtu $j + t$.]

5. Necht $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky AC s osou strany AB označme F . Dokažte, že trojúhelníky ABC a CDF mají stejný obsah.

(David Hruška)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Připomeňme, že pravidelný pětiúhelník je konvexní pětiúhelník, které má shodné všechny strany i všechny vnitřní úhly.

- N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ narýsujeme osy všech jeho stran a osy všech jeho úhlopříček. Kolik různých přímek to bude? Vysvětlete, proč každá z nich je osou souměrnosti celého pětiúhelníku a prochází jedním jeho vrcholem. [Pět přímek. Stačí ukázat, že například strana AB a úhlopříčka CE mají společnou osu, která prochází zbylým pátým vrcholem D . Vyjdeme z toho, že BCD , CDE a DEA jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky s hlavními vrcholy po řadě C , D , E . Odvodíme, že osa úhlu CDE je společnou osou úseček CE a AB : Pro první z nich to plyne z rovnoramenného trojúhelníku CDE , pro druhou z trojúhelníku BDA , který je rovněž rovnoramenný, neboť díky shodným trojúhelníkům BCD a DEA platí $|BD| = |DA|$ a navíc $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle EDA|$.]
- N2. Dokažte, že každé čtyři vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku. [Plyne to z řešení N1: Ukázali jsme tam, že osa souměrnosti celého pětiúhelníku procházející vrcholem D je společnou osou úseček AB a CE , takže to jsou základny rovnoramenného lichoběžníku $ABCE$ – druhé dvě protější strany BC a EA jsou totiž shodné, ne však rovnoběžné (díky tupým úhlům ABC a BAE).]
- N3. Rovnoběžné úsečky KL a MN neleží na jedné přímce. Dokažte, že trojúhelníky KLM a KLN mají stejný obsah. [Z podmínky $KL \parallel MN$ plyne, že výšky ke společné straně KL obou trojúhelníků KLM a KLN jsou shodné. Pro ně tak do vzorce $S = \frac{1}{2}zv$ pro obsah obecného trojúhelníku dosadíme stejné hodnoty z a v .]

- D1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme G průsečík úhlopříček AC a BD . Dokažte, že čtyřúhelník $AGDE$ je kosočtverec. [Z lichoběžníků $ACDE$ a $BDEA$ (viz výsledek N2) plyne $AG \parallel DE$ a $GD \parallel EA$, takže $AGDE$ je rovnoběžník; díky $|DE| = |EA|$ jde skutečně o kosočtverec.]
- D2. Dokažte, že dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které vycházejí z jednoho jeho vrcholu, rozdělují příslušný vnitřní úhel na třetiny. [Stačí ukázat, že v pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ jsou shodné tři úhly s vrcholem A , totiž BAC , CAD a DAE . Vnitřní úhly pravidelného pětiúhelníku mají velikost $3 \cdot 180^\circ : 5 = 108^\circ$. Proto úhly při základnách rovnoramenných trojúhelníků ABC a DEA mají velikost $(180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Vidíme, že oba úhly BAC a DAE mají ve srovnání s úhlem BAE třetinovou velikost (neboť $36 : 108 = 1 : 3$), takže třetinovou velikost má i třetí úhel CAD . (Dodejme, že z vlastností tzv. *středových* a *obvodových úhlů* v kružnici plyne následující tvrzení pro libovolné $n \geq 4$: Všechny úhlopříčky pravidelného n -úhelníku vycházející z jednoho jeho vrcholu dělí jemu příslušný vnitřní úhel na $n - 2$ shodných částí.)]
- D3. Označme a délku strany a u délku úhlopříčky daného pravidelného pětiúhelníku. Dokažte rovnost $a^2 + au = u^2$. [V pravidelném pětiúhelníku $ABCD$ označme G průsečík úhlopříček AC a BD . Podle úlohy N2 je $DABC$ rovnoramenný lichoběžník ($DA \parallel BC$), takže trojúhelníky DAG a BCG jsou podle věty uu podobné. Platí proto $|DA| : |BC| = |DG| : |GB|$ neboli $u : a = |DG| : |GB|$. Podle úlohy D1 je $AGDE$ kosočtverec o straně a , takže platí $|DG| = a$ a $|GB| = |BD| - |DG| = u - a$. Dosazením do $u : a = |DG| : |GB|$ dostaneme $u : a = a : (u - a)$, odkud už snadno plyne rovnost $a^2 + au = u^2$. (Úměra $u : a = a : (u - a)$ znamená, že bod G dělí každou z úhlopříček AC a BD v tzv. *zlatém řezu*.)]
6. Určete největší přirozené číslo $n \geq 10$ takové, že pro libovolných 10 různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí následující tvrzení: *Není-li ani jedno z těchto 10 čísel prvočíslem, pak je součet některých dvou z nich prvočíslem.* (Ján Mazák)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Ukažte, že z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ lze vybrat 4 různá čísla tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. Najděte rovněž všechny takové výběry. [Vyhovující výběr 4, 6, 8, 10 je jediný. Musí jít o 4 čísla z množiny $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, která má 6 prvků. Číslo 1 nemůže být ve výběru s třemi čísly 4, 6 a 10, proto je „nepoužitelné“. Totéž platí i pro číslo 9 kvůli podobné „kolizi“ s třemi čísly 4, 8 a 10. V úvahu tak připadají pouze čtyři sudá čísla 4, 6, 8 a 10. Jejich výběr vyhovuje, protože součet každých dvou z nich je rovněž sudé číslo různé od 2.]
- N2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ lze z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ vybrat $n - 1$ čísel tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. [Výběr bude mít požadovanou vlastnost, bude-li například sestaven ze sudých složených čísel. Splňuje to výběr $n - 1$ čísel 4, 6, 8, \dots , $2n$.]

- D1. Ukažte, že počet všech šestimístných prvočísel nepřevyšuje 300 000. [Šestimístná jsou čísla od 100 000 do 999 999, je jejich celkem 900 000. Stačí tedy ukázat, že alespoň 600 000 z nich je dělitelných dvěma nebo třemi. Dělitelných dvěma je jich 450 000, dělitelných třemi 300 000. V součtu $450\,000 + 300\,000 = 750\,000$ jsou ovšem započítána dvakrát čísla, která jsou dělitelná dvěma i třemi, tj. čísla dělitelná šesti. Těch je 150 000, takže dvěma nebo třemi je dělitelných právě $750\,000 - 150\,000 = 600\,000$ šestimístných čísel. Poznámka: Podobně zjistíme, že existuje 660 000 šestimístných složených čísel, která jsou dělitelná 2, 3 nebo 5, tudíž počet šestimístných prvočísel nepřevyšuje 240 000. I tento odhad je však velice hrubý – přesný počet šestimístných prvočísel je 68 906.]
- D2. Najděte největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo. [Číslo 731, viz [67-C-S-1](#)]
- D3. Kolik nejvýše čísel lze vybrat z množiny $\{1, 2, \dots, 2\,018\}$ tak, aby rozdíl žádných dvou vybraných čísel nebyl roven prvočíslu? [505 čísel, viz [67-B-II-4](#)]